

Sur la cohomologie de la puissance symétrique du fibré tautologique sur le schéma de Hilbert ponctuel d'une surface

Gentiana Danila
Mathematical Institute, University of Warwick,
Coventry CV4 7AL, United Kingdom
e-mail : gentiana@maths.warwick.ac.uk

1er avril 2001

Abstract : We compute some cohomology spaces for the symmetric power of the tautological bundle tensor the determinant bundle on the punctual Hilbert scheme $X^{[n]}$ of a smooth projective surface X on \mathbb{C} .

Key words and phrases : Punctual Hilbert scheme, tautological bundle, cohomology of tautological bundle

Subject classification : 14C05, 14F17.

Running heads : Fibré tautologique sur le schéma de Hilbert d'une surface

1 Introduction

Soit X une surface complexe projective et lisse et L un fibré inversible sur X . Pour tout entier n , on note $X^{[n]}$ le schéma de Hilbert qui paramètre les sous-schémas de X de longueur n . Il est lisse et projectif de dimension $2n$ ([Foga]). On suppose partout dans cet article que n est un entier ≥ 2 .

On considère la variété d'incidence $\Xi = X^{[n,1]} \subset X^{[n]} \times X$ des points (Z, x) qui vérifient $x \in \text{supp } Z$. On note p_{n1}, π_{n1} les projections

$$\begin{array}{ccc} \Xi & \xrightarrow{p_{n1}} & X \\ \pi_{n1} \downarrow & & \\ X^{[n]} & & \end{array} \quad (1)$$

On définit $L^{[n]} = \pi_{n1*}(p_{n1}^* L)$. C'est un faisceau localement libre de rang n sur $X^{[n]}$. On s'intéresse au calcul des groupes de cohomologie :

$$H^*(X^{[n]}, S^k L^{[n]}).$$

Le calcul est facile pour $k = 0$ ([D1]). Le calcul est complètement résolu dans [D2] pour $k = 1$. Les résultats sont résumés par la formule :

$$H^*(X^{[n]}, S^k L^{[n]}) = S^{n-k} H^*(X, \mathcal{O}) \otimes S^k H^*(X, L) \quad \text{pour } k = 0, 1, \quad (2)$$

où la puissance symétrique est prise au sens $\mathbb{Z}/2$ -graduée.

Le présent travail donne le calcul pour $k = 2$ et résout le problème pour toute la cohomologie pour $n = 2$ et $n = 3$ et calcule l'espace vectoriel des sections de $S^2 L^{[n]}$ pour n quelconque. Plus précisément,

on introduit pour chaque entier n l'application canonique

$$can : S^{n-2}H^*(X, \mathcal{O}_X) \otimes S^2H^*(X, L) \rightarrow H^*(X^{[n]}, S^2L^{[n]}), \quad (3)$$

de la manière suivante. On considère

$$S_{X^{[n]}}^2(\Xi) = (\Xi \times_{X^{[n]}} \Xi) / \mathfrak{S}_2.$$

C'est un fermé de $X^{[n]} \times S^2X$. On note π, p les projections

$$\begin{array}{ccc} S_{X^{[n]}}^2(\Xi) & \xrightarrow{p} & S^2X \\ \pi \downarrow & & \\ X^{[n]} & & \end{array} \quad (4)$$

On a $S^2L^{[n]} = \pi_* p^* \mathcal{D}_2^L$. On note $P = (a, p)$ le morphisme $S_{X^{[n]}}^2(\Xi) \rightarrow S^{n-2}X \times S^2X$, où a est le morphisme :

$$Z \mapsto (HC \circ \pi)(Z) - p(Z) \in S^{n-2}X.$$

L'accouplement (3) résulte de l'isomorphisme canonique $S^2L^{[n]} = P^*(\mathcal{O} \boxtimes \mathcal{D}_2^L)$, compte-tenu du fait que le morphisme π est fini. Les résultats principaux de cet article sont les suivants :

Théorème 1.1 (n=2) *L'application canonique (3) pour $n = 2$:*

$$can : S^2H^*(X, L) \rightarrow H^*(X^{[2]}, S^2L^{[2]}) \quad (5)$$

induit la décomposition en somme directe :

$$H^*(X^{[2]}, S^2L^{[2]}) = S^2H^*(X, L) \bigoplus (H^*(X, \mathcal{O}_X)/\mathbb{C}) \otimes H^*(X, L^2).$$

Théorème 1.2 (n=3) *L'application canonique (3) pour $n = 3$:*

$$can : H^*(X, \mathcal{O}_X) \otimes S^2H^*(X, L) \rightarrow H^*(X^{[3]}, S^2L^{[3]}), \quad (6)$$

induit la décomposition en somme directe

$$H^*(X^{[3]}, S^2L^{[3]}) = H^*(X, \mathcal{O}_X) \otimes S^2H^*(X, L) \bigoplus (S^2H^*(X, \mathcal{O}_X)/H^*(X, \mathcal{O}_X)) \otimes H^*(X, L^2).$$

Comme corollaire :

Corollaire 1.3 *Soit X une surface projective lisse et L un faisceau inversible sur X . Si X satisfait en outre $q = p_g = 0$, le morphisme canonique (3) est un isomorphisme $H^*(X^{[n]}, S^2L^{[n]}) = S^2H^*(X, L)$ lorsque $n = 2, 3$.*

Théorème 1.4 (*=0) *Le morphisme canonique (3) est un isomorphisme en degré 0 :*

$$can : S^2H^0(X, L) \xrightarrow{\sim} H^0(X^{[n]}, S^2L^{[n]}).$$

Les idées des démonstrations sont les suivantes : Comprendre la structure du faisceau $S^2 L^{[n]}$ équivaut à décrire le schéma $S_{X^{[n]}}^2(\Xi)$. Celui-ci a deux composantes irréductibles :

$$\begin{aligned} \bullet S_{(2)} &= \{(Z, 2x) \in X^{[n]} \times S^2 X, x \in \text{supp } Z\} \\ \bullet X^{(n,2)} &= \{(Z, x+y) \in X^{[n]} \times S^2 X, x+y \leq HC(Z)\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Le problème se réduit à l'étude de leur intersection schématique. Au-dessus de l'ouvert $X_{**}^{[n]}$ des schémas lisses ces deux composantes sont disjointes. Déjà au-dessus de l'ouvert $X_*^{[n]}$ des schémas avec au plus un point double cette intersection n'est pas triviale. Il est utile dans ce cas de faire le changement de base $B_*^n \rightarrow X_*^{[n]}$, où B^n est le produit fibré :

$$\begin{array}{ccc} B^n & \xrightarrow{\rho} & X^n \\ q \downarrow & & \downarrow p \\ X^{[n]} & \xrightarrow{HC} & S^n X. \end{array} \quad (8)$$

et B_*^n est l'image réciproque $B_*^n = q^{-1}(X_*^{[n]})$. Le problème se réduit au cas $n = 2$ (lemmes 2.3, 2.5). Un calcul de déterminant (prop. 2.1) nous permet d'éviter le calcul de l'intersection schématique. Pour des raisons techniques on remplace $X^{(n,2)}$ avec le schéma $X^{[n,2]} \subset X^{[n]} \times X^{[2]}$ paramétrant les sous-schémas (Z, Z') tels que $Z \subset Z'$. On note p_{n2}, π_{n2} les projections

$$\begin{array}{ccc} X^{[n,2]} & \xrightarrow{p_{n2}} & X^{[2]} \\ \pi_{n2} \downarrow & & \\ X^{[n]} & & \end{array}, \quad (9)$$

et $\mathcal{D}_2^{[n]} = \pi_{n2*}(p_{n2}^* \mathcal{D}_2)$. On note $\partial X_*^{[n]} \subset X_*^{[n]}$ le fermé des schémas avec exactement un point double et $\mu : \partial X_*^{[n]} \rightarrow X$ l'application qui associe au sous-schéma $Z \subset X$ son unique point double. Dans la section 2 on prouvera :

Théorème 1.5 *On a une suite exacte sur $X_*^{[n]}$:*

$$0 \rightarrow S^2 L^{[n]} \rightarrow \mathcal{D}_2^{[n]} \oplus L^{2[n]} \rightarrow \mu^* L^2|_{\partial X_*^{[n]}} \rightarrow 0. \quad (10)$$

Le théorème 1.5 et le résultat (2), ($k=1$), suffisent pour démontrer à la section 3 le théorème 1.1. Ce théorème suffit pour démontrer à la section 6 le théorème 1.4. Dans le cas $n > 2$ une étude fine des morphismes $\pi_{n2} : X^{[n,2]} \rightarrow X^{[n]}$ et $P : X^{[n,2]} \rightarrow S^{n-2} X \times S^2 X$ est nécessaire. On réussit à faire cette étude pour $n = 3$, c'est l'objet de la section 4. La section 5 contient la preuve du théorème 1.2 à partir des résultats de la section 4. Dans la section 7 on prolonge la suite exacte (10) de $X_*^{[n]}$ à une suite exacte sur un ouvert $X_{\sim}^{[n]}$ dont le complémentaire est de codimension 3 dans $X^{[n]}$. En utilisant ce fait on résume dans la remarque 7.9 ce qu'il reste à faire si on veut utiliser la même méthode pour n général.

Soit A un fibré inversible sur X . On considère le faisceau inversible $A \boxtimes \cdots \boxtimes A$ sur X^n . Le groupe \mathfrak{S}_n agit sur X^n par permutation des coordonnées et cette action s'étend à une action équivariante sur $A \boxtimes \cdots \boxtimes A$. On définit le faisceau inversible

$$\mathcal{D}_n^A = (A \boxtimes \cdots \boxtimes A)^{\mathfrak{S}_n} \quad (11)$$

sur la variété $S^n X = X^n / \mathfrak{S}_n$. On note aussi \mathcal{D}_n^A l'image réciproque de \mathcal{D}_n^A par le morphisme de Hilbert-Chow $HC : X^{[n]} \rightarrow S^n X$, qui associe à un sous-schéma $Z \subset X$ le cycle $\sum_{x \in X} \lg(Z_x) \cdot x$, où Z_x est la composante de Z en x et $\lg(Z_x)$ la longueur de Z_x . La motivation de cet article a pour origine le calcul de l'espace de sections du fibré déterminant de Donaldson sur l'espace de modules de faisceaux semi-stables de rang 2 sur le plan projectif (en analogie avec la formule de Verlinde). On a réduit dans [D1] ce problème au calcul des groupes de cohomologie :

$$H^*(X^{[n]}, S^k L^{[n]} \otimes \mathcal{D}_n^A).$$

L'analogie de la formule (2) pour A inversible général est ([D1], [D2]) :

$$H^*(X^{[n]}, S^k L^{[n]} \otimes \mathcal{D}_n^A) = S^{n-k} H^*(X, A) \otimes S^k H^*(X, L \otimes A) \quad \text{pour } k = 0, 1. \quad (12)$$

L'analogie du morphisme canonique (3) pour A non trivial est :

$$can : S^{n-2} H^*(X, A) \otimes S^2 H^*(X, L \otimes A) \rightarrow H^*(X^{[n]}, S^2 L^{[n]} \otimes \mathcal{D}_n^A). \quad (13)$$

Les résultats qu'on prouve dans le cas A général sont :

Théorème 1.6 (n=2) *L'application canonique (13) pour $n = 2$ fournit la décomposition canonique*

$$H^*(X^{[2]}, S^2 L^{[2]} \otimes \mathcal{D}_2^A) \simeq S^2 H^*(X, L \otimes A) \oplus K^*,$$

et K^ rentre dans une suite exacte longue :*

$$\dots \rightarrow K^* \rightarrow H^*(X, A) \otimes H^*(X, L^2 \otimes A) \rightarrow H^*(X, L^2 \otimes A^2) \rightarrow K^{*+1} \rightarrow \dots \quad (14)$$

Théorème 1.7 (n=3) *L'application canonique (13) pour $n = 3$ fournit la décomposition canonique*

$$H^*(X^{[3]}, S^2 L^{[3]} \otimes \mathcal{D}_3^A) \simeq H^*(X, A) \otimes S^2 H^*(X, L \otimes A) \oplus K^*,$$

et K^ rentre dans une suite exacte longue :*

$$\dots \rightarrow K^* \rightarrow S^2 H^*(X, A) \otimes H^*(X, L^2 \otimes A) \rightarrow H^*(X, A) \otimes H^*(X, L^2 \otimes A^2) \rightarrow K^{*+1} \rightarrow \dots \quad (15)$$

Théorème 1.8 (*=0) *Soit $n \geq 2$. L'application canonique (13) fournit la décomposition canonique*

$$H^0(X^{[n]}, S^2 L^{[n]} \otimes \mathcal{D}_n^A) = S^{n-2} H^0(X, A) \otimes S^2 H^0(X, L \otimes A) \oplus K_0, \quad (16)$$

où K_0 est le noyau du morphisme :

$$S^{n-1} H^0(X, A) \otimes H^0(X, L^2 \otimes A) \rightarrow S^{n-2} H^0(X, A) \otimes H^0(X, L^2 \otimes A^2), \quad (17)$$

donné par

$$u^{n-1} \otimes \alpha \mapsto (n-1)u^{n-2} \otimes u\alpha. \quad (18)$$

Remerciements : Je remercie M. Brion pour m'avoir attiré l'attention sur le lien entre les composantes (7) et les calculs de [D1]. Je suis reconnaissante à J. Le Potier pour m'avoir proposé ce sujet et pour les idées qu'il a généreusement partagé avec moi au cours de la rédaction de ce travail, en particulier le théorème 4.2 et le lemme 4.9. Pendant sa réalisation je me suis rejouie de l'ambiance détendue de l'Institut de Mathématiques de l'Université de Warwick.

2 Suites exactes sur $X_*^{[n]}$

On suppose partout dans cette section que n est un entier ≥ 2 . On fait la convention $\mathcal{D}_2 = \mathcal{D}_2^L$ qui sera valable partout dans la suite. Le but de cette section est de démontrer le théorème 1.5. La preuve du théorème utilise la proposition technique 2.4 qui suit. On commence par démontrer le cas $n = 2$ dans la proposition suivante. On note toujours $L^{[2]}$ le faisceau $q^*L^{[2]}$ sur B^2 . On note $E = q^{-1}(\partial X^{[2]})$. C'est un diviseur sur B^2 .

Proposition 2.1 *On a sur B^2 un diagramme commutatif :*

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{D}_2(-2E) & \longrightarrow & S^2 L^{[2]} & \longrightarrow & L^{2[2]} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{D}_2(-E) & \longrightarrow & \mathcal{D}_2 & \longrightarrow & \mathcal{D}_2|_E \longrightarrow 0, \end{array}$$

où les suites horizontales sont exactes.

Preuve de la proposition 2.1 :

On commence par démontrer l'exactitude de la première ligne. On note $\Xi = B^{[2,1]} \subset B^2 \times X$ le fermé des couples (\tilde{Z}, x) tels que $x \in \text{supp } q(\tilde{Z})$. On note également

$$\begin{array}{ccc} \Xi & \xrightarrow{p_{21}} & X \\ \pi_{21} \downarrow & & \\ B^2 & & . \end{array}$$

les morphismes vers B^2, X . Par le changement de base $B^2 \xrightarrow{q} X^{[2]}$ il résulte un isomorphisme sur B^2 :

$$L^{[2]} = \pi_{21*}(p_{21}^* L). \quad (19)$$

On considère le schéma $S_{B^2}^2(\Xi) = (\Xi \times_{B^2} \Xi) / \mathfrak{S}_2$ et pr_1, pr_2 les projections :

$$\begin{array}{ccc} S_{B^2}^2(\Xi) & \xrightarrow{pr_2} & S^2 X \\ pr_1 \downarrow & & \\ B^2 & & . \end{array}$$

On a :

$$S^2 L^{[2]} = pr_{1*}(pr_2^* \mathcal{D}_2).$$

On considère le morphisme diagonal $\Xi \xrightarrow{j} S_{B^2}^2(\Xi)$. Puisque $\pi_{21} : \Xi \rightarrow B^2$ est un morphisme fini, il est propre. Par conséquent le morphisme diagonal j est une immersion.

Le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} & & \Xi & \xrightarrow{p_{21}} & X \\ & & \downarrow j & & \downarrow diag \\ \pi_{21} \swarrow & & S_{B^2}^2(\Xi) & \xrightarrow{pr_2} & S^2 X \\ & & \downarrow pr_1 & & \\ B^2 & \xrightarrow{id} & B^2 & & \end{array}$$

démontre que $j^*pr_2^*\mathcal{D}_2 = p_{21}^*L^2$. Il résulte une surjection sur B^2 :

$$S^2L^{[2]} = pr_{1*}(pr_2^*\mathcal{D}_2) \xrightarrow{surj} L^{2[2]} = \pi_{21*}(p_{21}^*L^2) \rightarrow 0. \quad (20)$$

C'est une surjection entre un faisceau localement libre de rang 3 et un faisceau localement libre de rang 2. Son noyau est un faisceau inversible qui coïncide avec son déterminant. Alors

$$\text{Ker } surj = \det S^2L^{[2]} \otimes (\det L^{2[2]})^{-1}.$$

L'exactitude de la première ligne résulte du lemme :

Lemme 2.2 *Soit X une surface projective lisse et L un faisceau inversible. Pour le faisceau localement libre $L^{[2]}$ sur B^2 défini par la relation (19) on a*

$$\det L^{[2]} = \mathcal{D}_2(-E).$$

Effectivement cela nous donne :

$$\text{Ker } surj = (\det L^{[2]})^3 \otimes (\det L^{2[2]})^{-1} = \mathcal{D}_2^3(-3E) \otimes (\mathcal{D}_2^{L^2}(-E))^{-1} = \mathcal{D}_2^3(-3E) \otimes (\mathcal{D}_2^{-2}(E)) = \mathcal{D}_2(-2E).$$

Preuve du lemme 2.2 :

On a démontré dans [D2](2.10) l'existence d'une suite exacte courte :

$$0 \rightarrow L^{[2]} \rightarrow p_1^*L \oplus p_2^*L \rightarrow \rho^*L|_E \rightarrow 0, \quad (21)$$

où $p_i, i = 1, 2$ sont les morphismes $B^2 \xrightarrow{\rho} X^2 \xrightarrow{pr_i} X$, et ρ^*L est un faisceau inversible le long du diviseur E . Il en découle l'égalité

$$\det L^{[2]} = p_1^*L \otimes p_2^*L(-E) = \mathcal{D}_2(-E). \quad \square$$

Pour construire le carré droit du diagramme de l'énoncé, on considère le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} S^2(\Xi) & \xleftarrow{j} & \Xi \\ a \uparrow & & \uparrow b \\ B^2 & \xleftarrow{i} & E \end{array} \quad (22)$$

où i est l'inclusion canonique, a est le morphisme

$$\tilde{Z} \rightarrow (\tilde{Z}, HC \circ q(\tilde{Z})) \in S^2(\Xi) \subset B^2 \times S^2X,$$

et b sa restriction à $E \subset B^2$.

D'après la construction de ces morphismes on obtient

$$\begin{aligned} a^*(pr_2^*\mathcal{D}_2) &= \mathcal{D}_2, \\ i^*a^*(pr_2^*\mathcal{D}_2) &= \mathcal{D}_2|_E. \end{aligned}$$

Par conséquent le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 S^2 L^{[2]} & \longrightarrow & L^{2[2]} & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \\
 \mathcal{D}_2 & \longrightarrow & \mathcal{D}_2|_E & \longrightarrow & 0
 \end{array} \tag{23}$$

est commutatif. Si on considère le noyau des suites horizontales du diagramme (23) on obtient le diagramme de l'énoncé. \square

Avant de donner la proposition 2.4 analogue de la proposition 2.1 pour le cas n général, on a besoin de plusieurs notations.

On rappelle que B_*^n est l'image réciproque $q^{-1}(X_*^{[n]})$. C'est un revêtement non-ramifié de degré $n!$ de $X_*^{[n]}$. Le groupe \mathfrak{S}_n agit sur B_*^n et $X_*^{[n]} = B_*^n / \mathfrak{S}_n$. On a $B_*^2 = B^2$.

On note B_{**}^n l'ouvert de B_*^n des points Z tels que $\rho(Z)$ est un n -uplet à termes distincts.

Pour tous $1 \leq i < j \leq n$ on note $E_{ij} \subset B_*^n$ l'image réciproque $\rho^{-1}(\Delta_{i,j})$. C'est un diviseur. Les diviseurs E_{ij} sont deux à deux disjoints dans B_*^n .

On note B_{ij}^n l'ouvert $B_{**}^n \cup E_{ij} = B_*^n \setminus \bigcup_{\{k,l\} \neq \{i,j\}} E_{kl}$.

Lemme 2.3 *Il existe des applications*

$$(r_{ij}, s_{ij}) : B_{ij}^n \rightarrow B^2 \times X^{n-2}$$

qui identifient B_{ij}^n à un ouvert dans $B^2 \times X^{n-2}$.

Preuve :

D'après la définition de B_*^n , un point \tilde{Z} de B_*^n consiste en un sous-schéma Z de longueur n de X et un n -uplet $(x_1, \dots, x_n) \in X^n$ tels que $HC(Z) = x_1 + \dots + x_n$. On définit

$$s_{ij}(\tilde{Z}) = (x_1, \dots, \check{x}_i, \dots, \check{x}_j, \dots, x_n) \in X^{n-2}.$$

D'après la définition de B_{ij}^n , les termes $x_1, \dots, \check{x}_i, \dots, \check{x}_j, \dots, x_n$ sont deux à deux distincts, et distincts de x_i et x_j . Alors le schéma \mathcal{O}_Z s'écrit

$$\mathcal{O}_{Z'} \oplus \mathcal{O}_{x_1} \oplus \dots \oplus \check{\mathcal{O}}_{x_i} \oplus \dots \oplus \check{\mathcal{O}}_{x_j} \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_{x_n},$$

pour un schéma Z' de longueur 2 à support $x_i + x_j$.

On définit $r_{ij}(\tilde{Z}) = (Z', (x_i, x_j))$, point de B^2 . L'application réciproque associée à

$$((Z', (x_i, x_j)), (x_1, \dots, \check{x}_i, \dots, \check{x}_j, \dots, x_n)) \in B^2 \times X^{n-2}$$

le point

$$(\mathcal{O}_{Z'} \oplus \mathcal{O}_{x_1} \oplus \dots \oplus \check{\mathcal{O}}_{x_i} \oplus \dots \oplus \check{\mathcal{O}}_{x_j} \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_{x_n}, (x_1, \dots, x_n)) \in B_{ij}^n. \quad \square$$

On note $\Xi_{ij} \subset B_{ij}^n \times X^{[2]}$ le graphe de l'application $q \circ r_{ij} : B_{ij}^n \rightarrow B^2 \rightarrow X^{[2]}$.

On note $B_*^{[n,2]} \subset B_*^n \times X^{[2]}$ le fermé des points $(\tilde{Z}, Z') \in B_*^n \times X^{[2]}$ tels que $Z' \subset q(\tilde{Z})$. On note encore :

$$\begin{array}{ccc} B_*^{[n,2]} & \xrightarrow{p_{n2}} & X^{[2]} \\ \pi_{n2} \downarrow & & \\ B_*^n & & \end{array} \quad (24)$$

les projections.

Par changement de base $B_*^n \rightarrow X_*^{[n]}$ on a un isomorphisme sur B_*^n :

$$\mathcal{D}_2^{[n]} = \pi_{n2*}(p_{n2}^* \mathcal{D}_2). \quad (25)$$

Dans la généralisation de la proposition 2.1, $\mathcal{D}_2^{[n]}$ jouera le rôle de \mathcal{D}_2 . On a $\Xi_{ij} \subset B_{ij}^{[n,2]}$, où $B_{ij}^{[n,2]} = \pi_{n2}^{-1}(B_{ij}^n)$. Autrement dit on a une surjection :

$$\mathcal{O}_{B_{ij}^{[n,2]}} \rightarrow \mathcal{O}_{\Xi_{ij}} \rightarrow 0 \quad (26)$$

sur $B_{ij}^n \times X^{[2]}$. On tensorise avec $p_{n2}^* \mathcal{D}_2$ et on projette sur B_{ij}^n . On obtient, en tenant compte de la relation (25) et de la définition de Ξ_{ij} , une surjection

$$\mathcal{D}_2^{[n]} \rightarrow r_{ij}^* \mathcal{D}_2 \rightarrow 0. \quad (27)$$

On tensorise le dernier terme par $\mathcal{O}_{E_{ij}} = \mathcal{O}_{B_{ij}^n} / \mathcal{I}_{E_{ij}}$. On obtient la surjection :

$$\mathcal{D}_2^{[n]} \rightarrow r_{ij}^* \mathcal{D}_2 \otimes \mathcal{O}_{E_{ij}} \rightarrow 0 \quad (28)$$

sur B_{ij}^n . Puisque le dernier terme a son support sur E_{ij} , l'application s'étend à tout B_*^n . On considère la somme de ces morphismes

$$\mathcal{D}_2^{[n]} \rightarrow \sum_{i < j} r_{ij}^* \mathcal{D}_2 \otimes \mathcal{O}_{E_{ij}} \rightarrow 0. \quad (29)$$

On note $\mathcal{D}_2^{[n]}(-1)$ le noyau de cette application. Il jouera le rôle de $\mathcal{D}_2(-E)$ dans l'analogie de la proposition 2.1.

De la même façon, si on tensorise le dernier terme de la surjection (27) par $\mathcal{O}_{B_{ij}^n} / \mathcal{I}_{E_{ij}}^2$, et on fait la somme de tous ces morphismes, on obtient une surjection :

$$\mathcal{D}_2^{[n]} \rightarrow \sum_{i < j} r_{ij}^* \mathcal{D}_2 \otimes \mathcal{O}_{B_{ij}^n} / \mathcal{I}_{E_{ij}}^2 \rightarrow 0. \quad (30)$$

On note par $\mathcal{D}_2^{[n]}(-2)$ son noyau. Il jouera le rôle de $\mathcal{D}_2(-2E)$ dans l'analogie de la proposition 2.1.

On est en mesure d'énoncer :

Proposition 2.4 *On a sur B_*^n un diagramme commutatif :*

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{D}_2^{[n]}(-2) & \longrightarrow & S^2 L^{[n]} & \longrightarrow & L^{2[n]} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow a & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{D}_2^{[n]}(-1) & \longrightarrow & \mathcal{D}_2^{[n]} & \longrightarrow & \sum_{i < j} r_{ij}^* \mathcal{D}_2|_{E_{ij}} \longrightarrow 0, \end{array} \quad (31)$$

où les suites horizontales sont exactes, et l'application a est celle canonique.

Preuve :

L'idée consiste à ramener le résultat, à l'aide du lemme 2.3, au résultat connu quand $n = 2$. On démontrera l'existence d'un diagramme avec les propriétés de l'énoncé pour chaque B_{ij}^n et on démontrera qu'ils coïncident en restriction à B_{**}^n . Pour simplifier l'écriture, on prendra $B_{ij}^n = B_{12}^n$.

Lemme 2.5 *Pour $3 \leq i \leq n$ et pour un faisceau inversible L sur X , on note L_i le faisceau $pr_i^* L$ sur X^{n-2} , où pr_i est la projection $X^{n-2} \rightarrow X$. Pour $3 \leq i \leq n$ on note $L_{ij} = L_i \otimes L_j$. Dans l'identification du lemme 2.3 on a $((i, j) = (1, 2))$:*

$$L^{[n]} = L^{[2]} \boxtimes \mathcal{O} \oplus \mathcal{O} \boxtimes \left(\sum_{3 \leq i \leq n} L_i \right) \quad (32)$$

$$L^{2[n]} = L^{2[2]} \boxtimes \mathcal{O} \oplus \mathcal{O} \boxtimes \left(\sum_{3 \leq i \leq n} L_i^2 \right) \quad (33)$$

$$S^2 L^{[n]} = S^2 L^{[2]} \boxtimes \mathcal{O} \oplus L^{[2]} \boxtimes \left(\sum_{3 \leq i \leq n} L_i \right) \oplus \mathcal{O} \boxtimes \left(\sum_{3 \leq i < j \leq n} L_{ij} \right) \oplus \mathcal{O} \boxtimes \left(\sum_{3 \leq i \leq n} L_i^2 \right) \quad (34)$$

$$\mathcal{D}_2^{[n]} = \mathcal{D}_2 \boxtimes \mathcal{O} \oplus L^{[2]} \boxtimes \left(\sum_{3 \leq i \leq n} L_i \right) \oplus \mathcal{O} \boxtimes \left(\sum_{3 \leq i < j \leq n} L_{ij} \right) \quad (35)$$

$$\mathcal{D}_2^{[n]}(-1) = \mathcal{D}_2(-E) \boxtimes \mathcal{O} \oplus L^{[2]} \boxtimes \left(\sum_{3 \leq i \leq n} L_i \right) \oplus \mathcal{O} \boxtimes \left(\sum_{3 \leq i < j \leq n} L_{ij} \right) \quad (36)$$

$$\mathcal{D}_2^{[n]}(-2) = \mathcal{D}_2(-2E) \boxtimes \mathcal{O} \oplus L^{[2]} \boxtimes \left(\sum_{3 \leq i \leq n} L_i \right) \oplus \mathcal{O} \boxtimes \left(\sum_{3 \leq i < j \leq n} L_{ij} \right) \quad (37)$$

$$r_{12}^* \mathcal{D}_2|_{E_{12}} = \mathcal{D}_2|_E \boxtimes \mathcal{O} \quad (38)$$

$$r_{ij}^* \mathcal{D}_2|_{E_{ij}} = 0 \quad \text{pour} \quad (i, j) \neq (1, 2). \quad (39)$$

En utilisant le lemme 2.5, le diagramme (31) s'obtient sur B_{12}^n de la somme directe des diagrammes :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{D}_2(-2E) \boxtimes \mathcal{O} & \longrightarrow & S^2 L^2 \boxtimes \mathcal{O} & \longrightarrow & L^{2[2]} \boxtimes \mathcal{O} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{D}_2(-E) \boxtimes \mathcal{O} & \longrightarrow & \mathcal{D}_2 \boxtimes \mathcal{O} & \longrightarrow & \mathcal{D}_2|_E \boxtimes \mathcal{O} \longrightarrow 0, \\ & & & & & & \\ 0 & \longrightarrow & L^{[2]} \boxtimes \left(\sum_i L_i \right) & \longrightarrow & L^{[2]} \boxtimes \left(\sum_i L_i \right) & \longrightarrow & 0 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & L^{[2]} \boxtimes \left(\sum_i L_i \right) & \longrightarrow & L^{[2]} \boxtimes \left(\sum_i L_i \right) & \longrightarrow & 0 \longrightarrow 0, \\ & & & & & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{O} \boxtimes \left(\sum_{i < j} L_{ij} \right) & \longrightarrow & \mathcal{O} \boxtimes \left(\sum_{i < j} L_{ij} \right) \oplus \mathcal{O} \boxtimes \left(\sum_i L_i^2 \right) & \longrightarrow & \mathcal{O} \boxtimes \left(\sum_i L_i^2 \right) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{O} \boxtimes \left(\sum_{i < j} L_{ij} \right) & \longrightarrow & \mathcal{O} \boxtimes \left(\sum_{i < j} L_{ij} \right) & \longrightarrow & 0 \longrightarrow 0, \end{array} \quad (40)$$

où le premier résultat de la proposition 2.1 et les deux autres sont évidents.

Le lemme suivant montre que la restriction du diagramme (31) de B_{12}^n à B_{**}^n ne dépend pas du choix du couple $(1, 2)$ parmi les couples (i, j) avec $1 \leq i < j \leq n$.

Lemme 2.6 *On considère pour $i = 1, 2$, les faisceaux inversibles $L_i = pr_i^* L$ sur X^2 , où $pr_i : X^2 \rightarrow X$ est la projection sur la i -ème composante. On note $L_{12} = L_1 \otimes L_2$. On a, dans l'identification $B^2 \setminus E = X^2 \setminus \Delta$, les isomorphismes :*

$$\begin{aligned} L^{[2]} &= L_1 \oplus L_2, \\ L^2^{[2]} &= L_1^2 \oplus L_2^2, \\ S^2 L^{[2]} &= L_1^2 \oplus L_{12} \oplus L_2^2, \\ \mathcal{D}_2 &= \mathcal{D}_2(-E) = \mathcal{D}_2(-2E) = L_{12}, \\ \mathcal{D}_2|_E &= 0 \quad \text{sur} \quad B^2 \setminus E = X^2 \setminus \Delta. \end{aligned}$$

Dans l'isomorphisme du lemme 2.3, B_{**}^n s'identifie à un ouvert dans $(B^2 \setminus E) \times X^{n-2} = (X^2 \setminus \Delta) \times X^{n-2}$. Du lemme 2.6 il résulte que dans cette identification le diagramme (31) se restreint sur B_{**}^n au diagramme canonique (40), où les indices i parcourent $1 \leq i \leq n$ et les indices i, j parcourent $1 \leq i < j \leq n$. Par suite la restriction du diagramme (31) de B_{ij}^n à B_{**}^n ne dépend pas du choix du couple (i, j) . Par conséquent l'application a de l'énoncé est l'application canonique. \square

Preuve du lemme 2.5 :

On se place dans les notations de la preuve du lemme 2.3 pour $(i, j) = (1, 2)$. On rappelle que $\Xi \subset B_*^n \times X$ est le fermé des points (\tilde{Z}, x) pour lesquels $x \in \text{supp } q(\tilde{Z})$. Puisque les points $(x_i)_{3 \leq i \leq n}$ sont distincts deux à deux et disjoints du $\text{supp } Z'$ le long de l'ouvert B_{12}^n , on obtient qu'au-dessus de cet ouvert le schéma Ξ s'écrit comme la réunion des schémas disjoints $\Xi_{[12]}$ et Ξ_i , $3 \leq i \leq n$, où :

$$\begin{aligned} \Xi_{[12]} &= \{(\tilde{Z}, x), \tilde{Z} \in B_{12}^n, x \in X, x \in \text{supp } \tilde{Z}\}, \\ \Xi_i &= \{(\tilde{Z}, x), \tilde{Z} \in B_{12}^n, x = x_i\}. \end{aligned}$$

Alors

$$L^{[n]} = \pi_{n1*}(\mathcal{O}_\Xi \otimes p_{n1}^* L) = \pi_{n1*}(\mathcal{O}_{\Xi_{[12]}} \otimes p_{n1}^* L) \oplus \bigoplus_{3 \leq i \leq n} \pi_{n1*}(\mathcal{O}_{\Xi_i} \otimes p_{n1}^* L), \quad (41)$$

où π_{n1}, p_{n1} sont les projections de $B_{12}^n \times X^{[2]}$ sur B_{12}^n respectivement $X^{[2]}$. Par définition $\Xi_{[12]}$ est le produit tensoriel de $\Xi \subset B^2 \times X$ par l'application $r_{12} : B_{12}^n \rightarrow B^2$. On obtient :

$$\pi_{n1*}(\mathcal{O}_{\Xi_{[12]}} \otimes p_{n1}^* L) = r_{12}^*(\pi_{n1*}(\mathcal{O}_\Xi \otimes p_{n1}^* L)) = r_{12}^* L^{[2]}. \quad (42)$$

Par définition Ξ_i est le graphe de l'application $B_{12}^n \xrightarrow{\rho} X^n \xrightarrow{pr_i} X$. On obtient :

$$\pi_{n1*}(\mathcal{O}_{\Xi_i} \otimes p_{n1}^* L) = L_i. \quad (43)$$

Les relations (41), (42) et (43) impliquent la relation (32). Les relations (33) et (34) résultent de la relation (32).

On rappelle que $B_*^{[n,2]} \subset B_*^n \times X^{[2]}$ est le fermé des points (\tilde{Z}, ξ) pour lesquels le schéma ξ est inclus dans le schéma $q(\tilde{Z})$. Puisque les points $(x_i)_{3 \leq i \leq n}$ sont distincts deux à deux et disjoints de $\text{supp } Z'$ le long de B_{12}^n , on trouve qu'au-dessus de B_{12}^n le schéma $B_*^{[n,2]}$ est la réunion des schémas disjoints :

$$\begin{aligned} \Xi_{12} &= \{(\tilde{Z}, Z'), \tilde{Z} \in B_{12}^n\}, \\ \Xi_{[12]i} &= \{(\tilde{Z}, \xi), \tilde{Z} \in B_{12}^n, \xi = \mathcal{O}_{x_1} \oplus \mathcal{O}_{x_i} \text{ où } \xi = \mathcal{O}_{x_2} \oplus \mathcal{O}_{x_i}, 3 \leq i \leq n\}, \\ \Xi_{ij} &= \{(\tilde{Z}, \xi), \tilde{Z} \in B_{12}^n, \xi = \mathcal{O}_{x_i} \oplus \mathcal{O}_{x_j}\}. \end{aligned}$$

On rappelle qu'on a noté au (24) π_{n2}, p_{n2} les projections de $B_*^{[n,2]}$ sur B_*^n et respectivement $X^{[2]}$. La relation (25) implique

$$\mathcal{D}_2^{[n]} = \pi_{n2*}(\mathcal{O}_{\Xi_{12}} \otimes p_{n2}^* \mathcal{D}_2) \oplus \bigoplus_{3 \leq i \leq n} \pi_{n2*}(\mathcal{O}_{\Xi_{[12]i}} \otimes p_{n2}^* \mathcal{D}_2) \oplus \bigoplus_{3 \leq i \leq n} \pi_{n2*}(\mathcal{O}_{\Xi_{ij}} \otimes p_{n2}^* \mathcal{D}_2). \quad (44)$$

Par définition, Ξ_{12} est le graphe de l'application $B_{12}^n \xrightarrow{r_{ij}} B^2 \xrightarrow{\rho} X^2$. On obtient :

$$\pi_{n2*}(\mathcal{O}_{\Xi_{12}} \otimes p_{n2}^* \mathcal{D}_2) = r_{12}^* \mathcal{D}_2. \quad (45)$$

Le même argument implique, pour $3 \leq i \leq n$:

$$\pi_{n2*}(\mathcal{O}_{\Xi_{ij}} \otimes p_{n2}^* \mathcal{D}_2) = L_{ij}. \quad (46)$$

D'après la définition de $\Xi_{[12]i}$, dans l'identification $B_{12}^n \subset B^2 \times X^{n-2}$, le morphisme $\Xi_{[12]i} \rightarrow B_{12}^n$ est le produit des morphismes $\Xi_{[12]} \rightarrow B^2$ et $\Xi_i \rightarrow X^{n-2}$:

$$\Xi_{[12]} \times \Xi_i \subset (B^2 \times X) \times (X^{n-2} \times X) = (B^2 \times X^{n-2}) \times X^2 \rightarrow B^2 \times X^{n-2}.$$

En outre, le morphisme $\Xi_{[12]i} \rightarrow B_{12}^n \times X^{[2]} \xrightarrow{pr_2} X^{[2]}$ coïncide avec le morphisme :

$$\Xi_{[12]} \times \Xi_i \subset (B^2 \times X^{n-2}) \times (X^2 \setminus \Delta) \rightarrow X^2 \setminus \Delta \xrightarrow{p} S^2 X \setminus \Delta \xleftarrow{\sim} X^{[2]} \setminus \partial X^{[2]} \subset X^{[2]}.$$

Puisque $p^* \mathcal{D}_2 = L \boxtimes L$ on trouve :

$$\pi_{n2*}(\mathcal{O}_{\Xi_{[12]i}} \otimes p_{n2}^* \mathcal{D}_2) = \pi_{n2*}(\mathcal{O}_{\Xi_{[12]}} \otimes p_{n2}^* L) \otimes \pi_{n2*}(\mathcal{O}_{\Xi_i} \otimes p_{n2}^* L) = L^{[2]} \boxtimes L_i. \quad (47)$$

Les relations (44), (45), (46) et (47) impliquent la relation (35). Dans la notation de la relation (35), l'application (27) est la projection

$$\mathcal{D}_2^{[n]} \rightarrow \mathcal{D}_2 \boxtimes \mathcal{O}. \quad (48)$$

Dans l'identification $B_{12}^n \subset B^2 \times X^{n-2}$, le diviseur E_{12} coïncide avec $E \times X^{n-2}$. Par conséquent dans cette identification on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{E_{12}} &= \mathcal{O}_E \boxtimes \mathcal{O}, \\ \mathcal{O}_{B_{12}^n} / \mathcal{I}_{E_{12}}^2 &= \mathcal{O}_{B^2} / \mathcal{I}_E^2 \boxtimes \mathcal{O}. \end{aligned}$$

On tensorise les deux dernières relations par $r_{12}^* \mathcal{D}_2$ et on obtient :

$$r_{12}^* \mathcal{D}_2|_{E_{12}} = \mathcal{D}_2|_E \boxtimes \mathcal{O}, \quad (49)$$

$$r_{12}^* \mathcal{D}_2 \otimes \mathcal{O}_{B_{12}^n} / \mathcal{I}_{E_{12}}^2 = \mathcal{D}_2 \otimes \mathcal{O}_{B^2} / \mathcal{I}_E^2 \boxtimes \mathcal{O}. \quad (50)$$

La relation (49) est la relation (38) énoncée.

Pour $(i, j) \neq (1, 2)$ le faisceau $r_{ij}^* \mathcal{D}_2|_{E_{ij}}$ est nul en restriction à B_{12}^n , son support étant sur E_{ij} . La relation (39) en découle.

À partir des relations (48), (49) et (39), l'application (29) s'écrit

$$\mathcal{D}_2 \boxtimes \mathcal{O} \oplus L^{[2]} \boxtimes \left(\sum_i L_i \right) \oplus \mathcal{O} \boxtimes \left(\sum_{3 \leq i \leq n} L_{ij} \right) \rightarrow \mathcal{D}_2|_E \boxtimes \mathcal{O}.$$

Par conséquent son noyau $\mathcal{D}_2(-1)$ se met sous la forme (36). De manière analogue, les relations (48), (50) et l'annulation du terme $r_{ij}^* \mathcal{D}_2 \otimes \mathcal{O}_{B_{ij}^n} / \mathcal{I}_{E_{ij}}^2$ sur B_{12}^n pour $\{i, j\} \neq \{1, 2\}$ impliquent la relation (37). \square

Preuve du lemme 2.6 :

La suite exacte (21) implique $L^{[2]} = L_1 \oplus L_2$ sur $B^2 \setminus E$. Les deux identités suivantes de l'énoncé en résultent. Par construction on a $p^* \mathcal{D}_2 = L \boxtimes L = L_1 \otimes L_2$ sur X^2 . On obtient l'égalité sur B^2 :

$$\mathcal{D}_2 \stackrel{\text{notation}}{=} \rho^* p^* \mathcal{D}_2 = \rho^*(L_1 \otimes L_2) = L_1 \otimes L_2 \stackrel{\text{notation}}{=} L_{12}.$$

Les égalités

$$\mathcal{D}_2(-E) = \mathcal{D}_2(-2E) = \mathcal{D}_2$$

sur $B^2 \setminus E$ et

$$\mathcal{D}_2|_E = 0$$

sur $B^2 \setminus E$ sont évidentes. \square

Cela termine la preuve de la proposition 2.4 concernant l'existence du diagramme (31) sur B_*^n . Pour passer de la variété B_*^n à $X_*^{[n]}$ on utilise :

Lemme 2.7 *On a des isomorphismes de faisceaux sur $X_*^{[n]} = B_*^n / \mathfrak{S}_n$:*

$$(\mathcal{D}_2^{[n]}(-1))^{\mathfrak{S}_n} = (\mathcal{D}_2^{[n]}(-2))^{\mathfrak{S}_n} \quad (51)$$

$$(\mathcal{D}_2^{[n]})^{\mathfrak{S}_n} = \mathcal{D}_2^{[n]} \quad (52)$$

$$(S^2 L^{[n]})^{\mathfrak{S}_n} = S^2 L^{[n]} \quad (53)$$

$$(L^{2[n]})^{\mathfrak{S}_n} = L^{2[n]} \quad (54)$$

$$\left(\sum_{i < j} r_{ij}^* \mathcal{D}_2|_{E_{ij}} \right)^{\mathfrak{S}_n} = \mu^* L^2|_{\partial X_*^{[n]}}. \quad (55)$$

En appliquant le lemme 2.7 on obtient du diagramme (31) le diagramme commutatif sur $X_*^{[n]}$:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{D}_2^{[n]}(-2)^{\mathfrak{S}_n} & \longrightarrow & S^2 L^{[n]} & \longrightarrow & L^{2[n]} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow a & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{D}_2^{[n]}(-1)^{\mathfrak{S}_n} & \longrightarrow & \mathcal{D}_2^{[n]} & \longrightarrow & \mu^* L^2|_{\partial X_*^{[n]}} \longrightarrow 0, \end{array} \quad (56)$$

où les lignes sont exactes et le morphisme a est l'isomorphisme canonique.

Preuve du théorème 1.5 :

La suite exacte (10) est le mapping cône pour le diagramme (56) en supprimant la colonne de gauche.

\square

Preuve du lemme 2.7 :

Les relations (52), (53), (54) sont évidentes, les faisceaux localement libres $\mathcal{D}_2^{[n]}$, $S^2 L^{[n]}$ et $L^{2[n]}$ sur B_*^n provenant de $X_*^{[n]}$. On démontrera la relation :

$$\left(\sum_{i < j} r_{ij}^* \mathcal{D}_2 \otimes \mathcal{O}_{B_*^n / \mathcal{I}_{E_{ij}}^2} \right)^{\mathfrak{S}_n} = \mu^* L^2|_{\partial X_*^{[n]}}. \quad (57)$$

La suite (29) qui définit $\mathcal{D}_2^{[n]}(-1)$ est \mathfrak{S}_n -invariante. Si on considère la suite des \mathfrak{S}_n -invariants de cette suite et les relations (52) et (55) on trouve

$$(\mathcal{D}_2^{[n]}(-1))^{\mathfrak{S}_n} = \text{Ker}(\mathcal{D}_2^{[n]} \rightarrow \mu^* L^2|_{\partial X_*^{[n]}}). \quad (58)$$

De la même manière, à partir des relations (30), (52) et (57) on obtient

$$(\mathcal{D}_2^{[n]}(-2))^{\mathfrak{S}_n} = \text{Ker}(\mathcal{D}_2^{[n]} \rightarrow \mu^* L^2|_{\partial X_*^{[n]}}). \quad (59)$$

Les égalités (58) et (59) impliquent l'égalité (51). Il reste à démontrer (55) et (57).

Le terme gauche de l'équation (55) est une somme directe de faisceaux paramétrés par des sous-ensembles à deux éléments $\{i, j\} \subset \{1, 2, \dots, n\}$. Le groupe \mathfrak{S}_n agit transitivement sur l'ensemble de ces indices et le stabilisateur du point $\{1, 2\}$ est le sous-groupe $\mathfrak{S}_2 \times \mathfrak{S}_{n-2}$. D'après le lemme 2.2 de [D2] on obtient :

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i < j} r_{ij}^* \mathcal{D}_2|_{E_{ij}} \right)^{\mathfrak{S}_n} &= (r_{12}^* \mathcal{D}_2|_{E_{12}})^{\mathfrak{S}_2 \times \mathfrak{S}_{n-2}} \stackrel{a}{=} (\mathcal{D}_2|_E \boxtimes \mathcal{O})^{\mathfrak{S}_2 \times \mathfrak{S}_{n-2}} = \\ &= (\mathcal{D}_2|_E)^{\mathfrak{S}_2} \boxtimes \mathcal{O}_{X^{n-2}}^{\mathfrak{S}_{n-2}} \end{aligned} \quad (60)$$

où a est l'identification du lemme 2.3 pour $\{i, j\} = \{1, 2\}$. Un point de $\partial X_*^{[n]}$ s'écrit $\mathcal{O}_Z = \mathcal{O}_{Z'} \oplus \mathcal{O}_{x_3} \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_{x_n}$ pour Z' schéma singulier de longueur 2 et x_i des points deux à deux disjoints et disjoints de $\text{supp } Z'$. Alors $\partial X_*^{[n]}$ s'identifie avec un ouvert de $\partial X^{[2]} \times S^{n-2}X$. Dans cette identification le morphisme μ est la composition :

$$\partial X_*^{[n]} \rightarrow \partial X^{[2]} \times S^{n-2}X \xrightarrow{pr_1} \partial X^{[2]} \xrightarrow{HC} X = \partial S^2 X,$$

où HC est le morphisme de Hilbert-Chow. Comme $\mathcal{O}_{X^{n-2}}^{\mathfrak{S}_{n-2}} = \mathcal{O}_{S^{n-2}X}$, l'équation (55) se réduit à l'équation suivante sur $\partial X^{[2]}$:

$$(\mathcal{D}_2|_E)^{\mathfrak{S}_2} = HC^* L^2.$$

Par définition, le faisceau \mathcal{D}_2 sur B^2 est l'image réciproque $HC^* \mathcal{D}_2$, où \mathcal{D}_2 est un faisceau inversible sur $S^2 X$. On a $\mathcal{D}_2|_{X=\partial S^2 X} \simeq L^2$. Par conséquent l'égalité (55) est équivalente à l'égalité :

$$\mathcal{O}_E^{\mathfrak{S}_2} = \mathcal{O}_{\partial X^{[2]}}. \quad (61)$$

De la même manière que l'équation (60) on obtient :

$$\left(\sum_{i < j} r_{ij}^* \mathcal{D}_2 \otimes \mathcal{O}_{B_*^n / \mathcal{I}_{E_{ij}}^2} \right)^{\mathfrak{S}_n} = \left(\mathcal{D}_2 \otimes \mathcal{O}_{B^2 / \mathcal{I}_E^2} \right)^{\mathfrak{S}_2} \boxtimes \mathcal{O}_{X^{n-2}}^{\mathfrak{S}_{n-2}}$$

et la relation (57) est équivalente à l'égalité :

$$(\mathcal{O}_{B^2 / \mathcal{I}_E^2})^{\mathfrak{S}_2} = \mathcal{O}_{\partial X^{[2]}}. \quad (62)$$

Les égalités (61), (62) résultent du fait que le morphisme de degré 2, $q : B^2 \rightarrow X^{[2]} = B^2 / \mathfrak{S}_2$ est ramifié au-dessus du diviseur $\partial X^{[2]} : q^* \mathcal{O}_{\partial X^{[2]}} = \mathcal{O}_{B^2 / \mathcal{I}_E^2}$. \square

3 Le calcul de $H^*(X^{[2]}, S^2 L^{[2]})$

On calculera dans cette section la cohomologie $H^*(X^{[2]}, S^2 L^{[2]})$ à partir du théorème 1.5. Dans le cas $n = 2$ on a $X_*^{[2]} = X^{[2]}$, $\partial X_*^{[2]} = \partial X^{[2]}$ et $\mathcal{D}_2^{[2]} = \mathcal{D}_2$. Par conséquent le théorème 1.5 affirme l'existence d'une suite exacte :

$$0 \rightarrow S^2 L^{[2]} \rightarrow \mathcal{D}_2 \oplus L^{2[2]} \rightarrow \mu^* L^{[2]}|_{\partial X^{[2]}} \rightarrow 0 \quad (63)$$

sur $X^{[2]}$.

On commence par calculer la cohomologie sur $X^{[2]}$ des termes qui apparaissent dans la suite exacte ci-dessus.

Proposition 3.1 *On a*

$$H^*(X^{[2]}, L^{2[2]}) = H^*(X, \mathcal{O}) \otimes H^*(X, L^2).$$

Preuve :

Ce résultat est un corollaire de l'affirmation générale (2) pour $k = 1$, $n = 2$. □

Lemme 3.2 *On a*

$$H^*(X^{[2]}, \mathcal{D}_2) = S^2 H^*(X, L),$$

la puissance symétrique étant prise au sens $\mathbb{Z}/2$ -graduée.

Preuve :

Ce résultat est un corollaire de l'affirmation générale (2) pour $k = 0$, $n = 2$. □

Lemme 3.3 *On a*

$$H^*(X^{[2]}, \mu^* L^2|_{\partial X^{[2]}}) = H^*(X, L^2).$$

Preuve :

On a $H^*(X^{[2]}, \mu^* L^2|_{\partial X^{[2]}}) = H^*(\partial X^{[2]}, \mu^* L^2)$. Le morphisme μ est une fibration à fibres \mathbb{P}_1 . Alors

$$R^q \mu_* \mathcal{O}_{\partial X^{[2]}} = \begin{cases} 0 & \text{si } q > 0 \\ \mathcal{O}_X & \text{si } q = 0. \end{cases}$$

On en déduit que

$$R^q \mu_*(\mu^* L^2) = \begin{cases} 0 & \text{si } q > 0 \\ L^2 & \text{si } q = 0. \end{cases}$$

Par la suite spectrale de Leray on obtient :

$$H^*(X^{[2]}, \mu^* L^{[2]}) = H^*(X, L^2). \quad \square$$

Dorénavant, on omettra par convention l'espace X dans la notation $H^*(X, L)$ pour tout faisceau inversible L .

Preuve du théorème 1.1 :

La proposition 3.1 et les lemmes 3.2 et 3.3 impliquent la suite longue de cohomologie :

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow S^2H^*(L) = H^*(S^2X, \mathcal{D}_2) \rightarrow H^*(X^{[2]}, S^2L^{[2]}) \rightarrow S^2H^*(L) \oplus H^*(\mathcal{O}_X) \otimes H^*(L^2) \rightarrow H^*(L^2) \rightarrow \\ \rightarrow H^{*+1}(X^{[2]}, S^2L^{[2]}) \rightarrow \dots \end{aligned} \quad (64)$$

La composition du morphisme (2) pour $k = 1, n = 2$ avec l'application

$$H^*(X^{[2]}, S^2L^{[2]}) \rightarrow S^2H^*(L)$$

de la suite (64), provient de la composition

$$S^2H^*(L) = H^*(S^2X, \mathcal{D}_2) \xrightarrow{can} H^*(X^{[2]}, S^2L^{[2]}) \rightarrow H^*(X^{[2]}, \mathcal{D}_2).$$

Par la définition de ces morphismes il résulte que cette composition coïncide avec l'isomorphisme (2) pour $k = 1, n = 2$. On obtient la décomposition en somme directe $H^*(X^{[2]}, S^2L^{[2]}) = S^2H^*(L) \oplus K^*$, et la suite (64) se réduit à

$$\dots \rightarrow K^* \rightarrow H^*(\mathcal{O}) \otimes H^*(L^2) \rightarrow H^*(L^2) \rightarrow K^{*+1} \rightarrow \dots \quad (65)$$

L'application

$$H^*(\mathcal{O}_X) \otimes H^*(L^2) \xrightarrow{b} H^*(L^2)$$

de la suite (64) est celle canonique. Par conséquent cette application est surjective, donc $K^* = \text{Ker } b$, d'où la conclusion. \square

Preuve du théorème 1.6 :

On tensorise la suite exacte (63) par le faisceau inversible \mathcal{D}_2^A sur $X^{[2]}$. De la même manière que les énoncés 3.1, 3.2, 3.3 on prouve

$$H^*(X^{[2]}, L^{2[2]} \otimes \mathcal{D}_2^A) = H^*(X, A) \otimes H^*(X, L^2 \otimes A),$$

$$H^*(X^{[2]}, \mathcal{D}_2 \otimes \mathcal{D}_2^A) = S^2H^*(X, L \otimes A),$$

$$H^*(X^{[2]}, \mu^*L^2|_{\partial X^{[2]}} \otimes \mathcal{D}_2^A) = H^*(X, L^2 \otimes A^2).$$

On obtient la suite exacte longue :

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H^*(X^{[2]}, S^2L^{[2]} \otimes \mathcal{D}_2^A) \rightarrow S^2H^*(X, L \otimes A) \oplus H^*(X, A) \otimes H^*(X, L^2 \otimes A) \rightarrow \\ \rightarrow H^*(X, L^2 \otimes A^2) \rightarrow \dots \end{aligned} \quad (66)$$

De même que dans la preuve du théorème 1.1, la composition

$$S^2H^*(X, L \otimes A) \xrightarrow{can} H^*(X^{[2]}, S^2L^{[2]} \otimes \mathcal{D}_2^A) \rightarrow S^2H^*(X, L \otimes A)$$

est un isomorphisme. Alors $H^*(X^{[2]}, S^2L^{[2]} \otimes \mathcal{D}_2^A) = S^2H^*(X, L \otimes A) \oplus K^*$, et la suite exacte (66) se transforme dans la suite exacte (14). \square

4 Le cas $n = 3$, le passage de $X_*^{[3]}$ à $X^{[3]}$

Le but de cette section est de prolonger la suite exacte (10) de la variété $X_*^{[3]}$ à une suite exacte de faisceaux sur $X^{[3]}$. Le résultat est résumé dans le théorème suivant. Avant de l'énoncer on introduit quelques notations.

La sous-variété des schémas singuliers $\partial X^{[3]}$ est une hypersurface de la variété lisse $X^{[3]}$. L'ouvert $\partial X_*^{[3]} = \partial X^{[3]} \cap X_*^{[3]}$ est lisse et irréductible, et son complémentaire, $\partial X^{[3]} \setminus X_*^{[3]}$, est de codimension 2 dans $X^{[3]}$. Par conséquent $\partial X^{[3]}$ est une variété réduite et irréductible, donc intègre. On considère sa normalisation $\pi : \Sigma \rightarrow \partial X^{[3]}$. L'ouvert $\partial X_*^{[3]}$ est lisse, donc π est un isomorphisme au-dessus de $\partial X_*^{[3]}$. On note $i : \partial X_*^{[3]} \rightarrow \Sigma$ le morphisme d'inclusion.

Lemme 4.1 *On considère le diagramme :*

$$\begin{array}{ccccc} & & \Sigma & & \\ & \swarrow \pi & \uparrow i & & \\ \partial X^{[3]} & \xleftarrow{j} & \partial X_*^{[3]} & \xrightarrow{\mu} & X, \end{array} \quad (67)$$

où μ est le morphisme défini dans la section 2. Il existe une application régulière $\tilde{\mu} : \Sigma \rightarrow X$ qui rend commutatif ce diagramme.

La preuve du lemme 4.1 sera donnée après la preuve du théorème 4.2.

Théorème 4.2 *La suite exacte (10) de faisceaux sur $X_*^{[3]}$ se prolonge à une suite exacte sur $X^{[3]}$:*

$$0 \rightarrow S^2 L^{[3]} \rightarrow \mathcal{D}_2^{[3]} \oplus L^{2[3]} \rightarrow \pi_* \tilde{\mu}^* L^2 \rightarrow 0.$$

Preuve du théorème 4.2 :

La preuve utilise les résultats suivants, dont la démonstration occupera le reste de la section :

Proposition 4.3 *Le faisceau $\mathcal{D}_2^{[3]}$ est localement libre de rang 3 sur $X^{[3]}$.*

Lemme 4.4 *Le morphisme $L^{2[3]} \rightarrow \mu^* L^2|_{\partial X_*^{[3]}}$ sur $X_*^{[3]}$ de la suite exacte (10) se prolonge à un morphisme sur $X^{[3]}$*

$$L^{2[3]} \rightarrow \pi_* \tilde{\mu}^* L^2.$$

On considère le fermé $X \subset X^{[3]}$ des schémas d'idéal $m_x^2, x \in X$.

Lemme 4.5 *Le morphisme $\mathcal{D}_2^{[3]} \rightarrow \mu^* L^2|_{\partial X_*^{[3]}}$ sur $X_*^{[3]}$ de la suite exacte (10) se prolonge à un morphisme*

$$\mathcal{D}_2^{[3]} \rightarrow \pi_* \tilde{\mu}^* L^2 \quad (68)$$

sur $X^{[3]}$, surjectif sur $X^{[3]} \setminus X$.

On note $k : X_*^{[3]} \rightarrow X^{[3]} \setminus X$ l'inclusion canonique. Le foncteur k_* est exacte à gauche. On l'applique à la suite exacte (10). On obtient, en tenant compte du fait que les faisceaux $S^2 L^{[3]}$, $L^{2[3]}$ et $\mathcal{D}_2^{[3]}$ sont localement libres (on utilise ici la proposition 4.3), la suite exacte sur $X^{[3]}$:

$$0 \rightarrow S^2 L^{[3]} \rightarrow \mathcal{D}_2^{[3]} \oplus L^{2[3]} \xrightarrow{b} k_* \mu^* L^2. \quad (69)$$

Le morphisme i est une immersion ouverte, donc le diagramme (67) induit une inclusion canonique $\tilde{\mu}^*L^2 \subset i_*\mu^*L^2$. On lui applique le morphisme fini π et on obtient l'inclusion canonique

$$\pi_*\tilde{\mu}^*L^2 \subset \pi_*i_*\mu^*L^2 = k_*\mu^*L^2.$$

Les lemmes 4.4 et 4.5 montrent que le morphisme b de la suite (69) se factorise à travers un morphisme

$$\mathcal{D}_2^{[3]} \oplus L^{2[3]} \rightarrow \pi_*\tilde{\mu}^*L^2 \subset k_*\mu^*L^2.$$

La suite exacte (69) induit par conséquent la suite exacte sur $X^{[3]} \setminus X$:

$$0 \rightarrow S^2L^{[3]} \rightarrow \mathcal{D}_2^{[3]} \oplus L^{2[3]} \rightarrow \pi_*\tilde{\mu}^*L^2.$$

L'application b de la suite exacte (69) est surjective d'après le lemme 4.5. On note $j : X^{[3]} \setminus X \rightarrow X^{[3]}$ l'inclusion canonique. On applique le foncteur j_* à la dernière suite exacte et on trouve une suite exacte sur $X^{[3]}$:

$$0 \rightarrow S^2L^{[3]} \rightarrow \mathcal{D}_2^{[3]} \oplus L^{2[3]} \rightarrow j_*\pi_*\tilde{\mu}^*L^2 \rightarrow R^1j_*(S^2L^{[3]}) \quad (70)$$

Le morphisme j est l'inclusion d'un ouvert dont le complémentaire est de codimension 4 dans la variété lisse $X^{[3]}$, et $S^2L^{[3]}$ est un faisceau localement libre sur $X^{[3]}$, donc $R^1j_*(S^2L^{[3]}) = 0$. Pour écrire la suite (70) sous la forme de l'énoncé il suffit de démontrer

$$\pi_*\tilde{\mu}^*L^2 = j_*j^*(\pi_*\tilde{\mu}^*L^2). \quad (71)$$

On considère le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \Sigma' & \xrightarrow{l} & \Sigma \\ \pi \downarrow & & \\ X^{[3]} \setminus X & \xrightarrow{j} & \partial X^{[3]}, \end{array}$$

où Σ' est l'image réciproque de $X^{[3]} \setminus X$ par le morphisme π . On a

$$j_*j^*\pi_*\tilde{\mu}^*L^2 = j_*\pi_*l^*\tilde{\mu}^*L^2 = \pi_*l_*l^*\tilde{\mu}^*L^2.$$

Le faisceau $\tilde{\mu}^*L^2$ est inversible sur Σ et l est l'inclusion d'un ouvert dont le complémentaire est de codimension 3 dans la variété normale Σ . On en déduit

$$l_*l^*\tilde{\mu}^*L^2 = \tilde{\mu}^*L^2,$$

d'où l'égalité (71), d'où la suite exacte de l'énoncé. \square

Le reste du chapitre est consacré à la démonstration du lemme 4.1, de la proposition 4.3 et des lemmes 4.4, 4.5 dans cet ordre.

Preuve du lemme 4.1 :

On utilisera une présentation explicite de la normalisation $\pi : \Sigma \rightarrow \partial X^{[3]}$. On considère l'image réciproque D de l'hypersurface $\partial X^{[2]}$ par le morphisme $p_{32} : X^{[3,2]} \rightarrow X^{[2]}$. C'est le fermé des points $(Z, Z') \in X^{[3]} \times X^{[2]}$ qui vérifient $Z' \subset Z$ et Z' est singulier. Le morphisme $\pi_{32} : X^{[3,2]} \rightarrow X^{[3]}$ envoie D

dans $\partial X^{[3]}$ et ce morphisme est un isomorphisme au-dessus de $\partial X_*^{[3]}$. Effectivement, un point de $\partial X_*^{[3]}$ est de la forme $\mathcal{O}_Z = \mathcal{O}_{Z'} \oplus \mathcal{O}_a$, avec Z' schéma singulier de longueur 2 à support disjoint du point a . L'association $Z \mapsto (Z, Z')$ est une application réciproque sur $\partial X_*^{[3]}$ de l'application $\pi_{32} : D \rightarrow \partial X^{[3]}$.

Considérons la factorisation de Stein du morphisme $\pi_{32} : D \rightarrow \partial X^{[3]}$:

$$D \xrightarrow{\tilde{\pi}_{32}} \Sigma \stackrel{\text{notation}}{=} \text{Spec}(\pi_{32*}\mathcal{O}_D) \xrightarrow{\pi} \partial X^{[3]}.$$

On démontre dans la suite que le schéma D est normal. Le fait que pour tout ouvert U de Σ on a $\Gamma(U, \mathcal{O}_\Sigma) = \Gamma(\tilde{\pi}_{32}^{-1}(U), \mathcal{O}_D)$ implique que Σ est normal. Puisque le morphisme π_{32} est birationnel, le morphisme π est aussi birationnel. Donc le morphisme $\pi : \Sigma \rightarrow \partial X^{[3]}$ est un morphisme de normalisation.

On construit le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{p_{32}} & \partial X^{[2]} \\ \tilde{\pi}_{32} \downarrow & \searrow \tilde{\mu} & \downarrow HC \\ \Sigma & & X = \partial S^2 X, \end{array} \quad (72)$$

où HC est le morphisme de Hilbert-Chow, et $\tilde{\mu}$ est la composition $HC \circ p_{32}$. Le morphisme $\tilde{\mu}$ associe au couple (Z, Z') le point singulier du schéma Z . Il se factorise alors à travers une application continue $\partial X^{[3]} \rightarrow X$, donc à travers une application continue $\Sigma \xrightarrow{\tilde{\mu}} X$. Cette dernière application est régulière, car pour tout ouvert $W \subset X$ on dispose d'un morphisme d'anneaux :

$$\Gamma(W, \mathcal{O}_X) \rightarrow \Gamma(\tilde{\mu}^{-1}(W), \mathcal{O}_\Sigma) = \Gamma(\tilde{\pi}_{32}^{-1}\tilde{\mu}^{-1}(W), \mathcal{O}_D).$$

En considérant les isomorphismes $D \xrightarrow{\tilde{\pi}_{32}} \Sigma \xrightarrow{\pi} \partial X^{[3]}$ au-dessus de $\partial X_*^{[3]}$, on voit que le morphisme qu'on vient de construire prolonge le morphisme $\mu : \partial X_*^{[3]} \rightarrow X$ construit dans la section 2. Pour démontrer que le schéma D est normal, on considère le morphisme $\pi_{32} : D \rightarrow \partial X^{[3]}$. On prend le fermé $X \subset \partial X^{[3]}$ des schémas d'idéal m_x^2 , $x \in X$. La fibre du morphisme $\pi_{32} : D \rightarrow \partial X^{[3]}$ dans chaque point $\{m_x^2\}$ est de dimension 1 : elle est formée par les points $Z' \in X^{[2]}$, schémas de longueur 2 d'idéal $\mathbb{C} \cdot \ell + m_x^2, \ell \neq 0$. Par suite l'image réciproque $Y = \pi_{32}^{-1}(X)$ est de dimension 3.

On démontre :

Lemme 4.6 *La variété $D \setminus Y$ est lisse.*

La variété $X^{[3,2]}$ est lisse d'après [Cheah], [Tikh] (la preuve du lemme 4.9(ii) qui suit donne une autre démonstration), et D est une hypersurface dans $X^{[3,2]}$. D'après le lemme 4.6 la variété D est régulière en codimension 1. Par conséquent ([Hart], prop. II 8.23.b) la variété D est normale. Ceci termine la preuve du lemme 4.1. \square

Preuve du lemme 4.6 :

La question est locale et il suffit de la traiter en géométrie analytique. On peut supposer que $X = \mathbb{P}_2$. On note $(U : V : W)$ les coordonnées homogènes sur \mathbb{P}_2 et $u = \frac{U}{W}, v = \frac{V}{W}$. Le morphisme $\pi_{32} : D \rightarrow \partial X^{[3]}$ est un isomorphisme au-dessus de $\partial X_*^{[3]}$, et $\partial X_*^{[3]}$ est lisse. Il suffit donc de traiter le problème au-dessus de $\partial X^{[3]} \setminus (X \cup \partial X_*^{[3]})$. Le groupe $\text{PGL}(3)$ agit sur cet ensemble ($X = \mathbb{P}_2$) et il y a deux orbites, représentées par les schémas d'idéal (v, u^3) , respectivement $(v - Au^2, u^3), A \in \mathbb{C}^*$.

Lemme 4.7 *L'association :*

$$(A, B, C, p, q, r) \mapsto (v - (Au^2 + Bu + C), u^3 + pu^2 + qu + r) \quad (73)$$

donne une paramétrisation locale $\mathbb{C}^6 \rightarrow X^{[3]}$ de $X^{[3]}$ au voisinage du point $s_0 = (v, u^3)$.

Preuve :

L'application

$$(A, B, C) \mapsto v - (Au^2 + Bu + C)|_{H^0(\mathcal{O}_{s_0})}$$

est une application affine de rang 3 entre les espaces vectoriels $\mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$. Par suite l'application $(A, B, C) \mapsto v - (Au^2 + Bu + C)|_{H^0(\mathcal{O}_{s_0})}$ est de rang 3 pour s dans un voisinage de s_0 dans $X^{[3]}$. On note $\Gamma \simeq \mathbb{A}^3$ l'ensemble des coniques d'équation $v = Au^2 + Bu + C$. Alors tout point s dans un voisinage V de s_0 dans $X^{[3]}$ est contenu dans une unique conique $\gamma(s) \in \Gamma$ et l'application $\gamma : V \rightarrow \Gamma$ ainsi obtenue admet des différentielles de rang 3 en tout point. Les fibres du morphisme γ en chaque point $(A, B, C) \in \Gamma$ sont en bijection avec les schémas de longueur 3 sur la droite $v = 0$. Ces schémas sont paramétrés au voisinage du point $u = 0$ par $(p, q, r) \in \mathbb{C}^3$ par l'association

$$(p, q, r) \mapsto \mathbb{C}[u]/(u^3 + pu^2 + qu + r).$$

On obtient une application locale $V \rightarrow \mathbb{C}^6$, $s \mapsto (A, B, C, p, q, r)$. La différentielle de cette application est de rang 6 en s_0 , donc il s'agit d'un isomorphisme local. \square

Tout voisinage du point $s_0 = (v, u^3)$ contient des points de la forme $(v - Au^2, u^3)$: on prend $B = C = p = q = r = 0$. Il suffit donc de démontrer que le schéma D est lisse au-dessus d'un voisinage du point $s_0 = (v, u^3)$.

La variété $\partial X^{[2]}$ admet une paramétrisation locale $\mathbb{C}^3 \rightarrow \partial X^{[2]}$ au voisinage du point (v, u^2) donnée par

$$(\lambda, \mu, \alpha) \mapsto (v - \lambda u - \mu, (u - \alpha)^2). \quad (74)$$

Un calcul simple prouve que le schéma d'équations (73) contient le schéma d'équations (74) si et seulement si :

$$\begin{aligned} -B &= -\lambda - 2A\alpha \\ -C &= -\mu - A\alpha^2 \\ q &= -2p\alpha - 3\alpha^3 \\ r &= -q\alpha - p\alpha^2 - \alpha^3. \end{aligned} \quad (75)$$

En conclusion, le sous-schéma D est défini par les équations (75) dans $X^{[3]} \times \partial X^{[2]}$ au voisinage du point $((v, u^2), (v, u^3))$. C'est le graphe d'une application $(A, p, \lambda, \mu, \alpha) \mapsto (B, C, q, r)$, donc le sous-schéma D est lisse dans ce voisinage. \square

Preuve de la proposition 4.3 :

La relation (35) du lemme 2.5 :

$$\mathcal{D}_2^{[3]} = \mathcal{D}_2 \boxtimes \mathcal{O} \oplus L^{[2]} \boxtimes L_3$$

prouve que $\mathcal{D}_2^{[3]}$ est localement libre de rang 3 sur $X_*^{[3]}$. Le fermé de dimension 4, $X^{[3]} \setminus X_*^{[3]}$ est la réunion des ensembles disjoints $X \subset X^{[3]}$ (qui paramètre les points triples de la forme $\mathcal{O}/\mathfrak{m}_X^2$, avec $x \in X$), et $X_{3C}^{[3]}$ (qui paramètre les sous-schémas de longueur 3 à support en un point et situés sur une courbe lisse dans X). Au-dessus de $X_{3C}^{[3]}$ la projection π_{32} qui définit $\mathcal{D}_2^{[3]}$ (cette projection a été introduite dans la section 2), est quasi-finie. Alors la dimension de la fibre de $\mathcal{D}_2^{[3]}$ en un point de $X_{3C}^{[3]}$ coïncide avec la longueur de la fibre schématique de π_{32} en ce point. La longueur de la fibre schématique dépend seulement de la géométrie analytique de X . C'est par conséquent une constante le long de $X_{3C}^{[3]}$. De même, la dimension de la fibre de $\mathcal{D}_2^{[3]}$ en un point $x \in X \subset X^{[3]}$ ne dépend pas du choix de $x \in X$. Pour démontrer la proposition il suffit de démontrer que la dimension de la fibre de $\mathcal{D}_2^{[3]}$ en un point de $x \in X$ est 3. Effectivement, tout voisinage de x dans $X^{[3]}$ contient des points de $X_{3C}^{[3]}$ et par le théorème de semi-continuité ([Hart], ex. III 12.7.2) on obtient que la dimension des fibres de $\mathcal{D}_2^{[3]}$ aux points de $X_{3C}^{[3]}$ est 3.

Il suffit donc de démontrer que $\mathcal{D}_2^{[3]} \otimes_{\mathcal{O}_{X^{[3]}}} \mathcal{O}_X$ est localement libre de rang 3 le long de $X \subset X^{[3]}$. On définit le fermé Y dans $X^{[3,2]}$ par le diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{j} & X^{[3,2]} \\ \pi'_{32} \downarrow & & \downarrow \pi_{32} \\ X & \xrightarrow{i} & X^{[3]} \end{array}$$

La formule de changement de base dans la catégorie dérivée pour l'application $i : X \rightarrow X^{[3]}$ et pour le faisceau $\mathcal{L}_2 = p_{32}^* \mathcal{D}_2$ sur $X^{[3,2]}$:

$$R\pi_{32*}(\mathcal{L}_2) \otimes_{X^{[3]}}^L \mathcal{O}_X = R\pi'_{32*}(\mathcal{L}_2 \otimes_{X^{[3]}}^L \mathcal{O}_X)$$

induit les suites spectrales :

$$\begin{aligned} {}^{\vee}E_2^{pq} &= R^p \pi'_{32*}(\underline{\mathrm{Tor}}_{-q}^{\mathcal{O}_{X^{[3]}}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{L}_2)) \Rightarrow T^{p+q} \mathcal{L}_2 \\ {}^{\prime\prime}E_2^{pq} &= \underline{\mathrm{Tor}}_{-p}^{\mathcal{O}_{X^{[3]}}}(\mathcal{O}_X, R^q \pi_{32*} \mathcal{L}_2) \Rightarrow T^{p+q} \mathcal{L}_2. \end{aligned}$$

On commence par calculer les termes ${}^{\vee}E_2^{pq}$. Le faisceau \mathcal{L}_2 est inversible sur $X^{[3,2]}$. Alors

$$\underline{\mathrm{Tor}}_{-q}^{\mathcal{O}_{X^{[3]}}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{L}_2) = \underline{\mathrm{Tor}}_{-q}^{\mathcal{O}_{X^{[3]}}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_{X^{[3,2]}}) \otimes \mathcal{L}_2|_Y.$$

Lemme 4.8 *Le faisceau $\mathcal{L}_2|_Y$ est isomorphe à $\pi_{32}^* L^2$.*

Preuve :

Le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} Y & \xrightarrow{j} & X^{[3,2]} & \xrightarrow{p_{32}} & X^{[2]} & \longrightarrow & S^2 X \\ & \searrow \pi'_{32} & & & \nearrow diag & & \\ & & X & & & & \end{array}$$

est commutatif. Alors $j^* \mathcal{L}_2 = \pi_{32}^* diag^* \mathcal{D}_2 = \pi_{32}^* L^2$. □

Pour calculer ${}^{\vee}E_2^{pq}$ on utilise le lemme technique :

Lemme 4.9 – (i) *Le fermé Y est une fibration en espaces projectifs \mathbb{P}_1 au-dessus de X .*

– (ii) *Le faisceau $\text{Tor}_q^{\mathcal{O}_{X^{[3]}}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_{X^{[3,2]}})$ est nul pour $q > 1$, \mathcal{O}_Y pour $q = 0$ et un faisceau inversible M sur Y pour $q = 1$.*

– (iii) *Au-dessus de chacune des fibres \mathbb{P}_1 du morphisme $\pi'_{32} : Y \rightarrow X$, M est isomorphe à $\mathcal{O}(-3)$.*

La démonstration du lemme 4.9 sera donnée à la fin de la démonstration de la proposition 4.3.

On a

$$\begin{aligned} {}^{\vee}E_2^{p0} &= R^p \pi'_{32*}(\pi'^*_{32} L^2) = \\ &= L^2 \otimes R^p \pi'_{32*} \mathcal{O}_Y = \begin{cases} 0 & \text{si } p > 0 \\ L^2 & \text{si } p = 0, \end{cases} \end{aligned}$$

d'après le point (i) du lemme. On a aussi

$$\begin{aligned} {}^{\vee}E_2^{p,-1} &= R^p \pi'_{32*}(\pi'^*_{32} L^2 \otimes M) = \\ &= L^2 \otimes R^p \pi'_{32*} M = \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq 1 \\ \text{localement libre de rang 2 sur } X & \text{si } p = 1, \end{cases} \end{aligned}$$

d'après l'égalité du point (iii) du lemme et du fait que $h^1(\mathbb{P}_1, \mathcal{O}(-3)) = 2$. Finalement, le point (ii) du lemme implique

$${}^{\vee}E_2^{pq} = 0 \quad \text{pour } q \neq 0, -1.$$

En conclusion, on a $T^{p+q} \mathcal{L}_2 = 0$ pour $p + q \neq 0$ et $T^0 \mathcal{L}_2$ est un faisceau localement libre de rang 3 sur X qui vérifie la suite exacte :

$$0 \rightarrow L^2 \otimes R^1 \pi'_{32*} M \rightarrow T^0 \mathcal{L}_2 \rightarrow L^2 \rightarrow 0. \quad (76)$$

On considère maintenant ${}^{\prime\prime}E_2^{pq}$. On démontre tout d'abord :

$$R^q \pi_{32*} \mathcal{L}_2 = 0 \quad \text{pour } q > 0. \quad (77)$$

On suppose par l'absurde qu'il existe un entier $q > 0$ tel que le faisceau $R^q \pi_{32*} \mathcal{L}_2$ est non nul. On considère le plus grand parmi ces entiers q . Le faisceau $R^q \pi_{32*} \mathcal{L}_2$ a son support sur $X \subset X^{[3]}$ puisque au dessus de $X^{[3]} \setminus X$ le morphisme π_{32} est fini. Alors

$${}^{\prime\prime}E_2^{0q} = \mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_{X^{[3]}}} R^q \pi_{32*} \mathcal{L}_2 \neq 0.$$

Mais le fait que q est le plus grand entier tel que $R^q \pi_{32*} \mathcal{L}_2 \neq 0$ implique que les différentielles ${}^{\prime\prime}d_2, {}^{\prime\prime}d_3, \dots$ qui aboutissent sur ${}^{\prime\prime}E_2^{0q}$ et qui partent de ${}^{\prime\prime}E_2^{0q}$ sont nulles. Donc $T^q \mathcal{L}_2 = {}^{\prime\prime}E_2^{0q} \neq 0$, contradiction. Par conséquent les seuls termes non nuls sont ${}^{\prime\prime}E_2^{p0}$. Donc ${}^{\prime\prime}E_2^{p0} = T^p \mathcal{L}_2$. Alors le seul terme non nul est

$$T^0 \mathcal{L}_2 = {}^{\prime\prime}E_2^{00} = \mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_{X^{[3]}}} \pi_{32*} \mathcal{L}_2 = \mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_{X^{[3]}}} \mathcal{D}_2^{[3]}.$$

Alors le faisceau $\mathcal{D}_2^{[3]} \otimes_{\mathcal{O}_{X^{[3]}}} \mathcal{O}_X$ est localement libre de rang 3 sur X et vérifie la suite exacte :

$$0 \rightarrow L^2 \otimes R^1 \pi'_{32*} M \rightarrow \mathcal{D}_2^{[3]} \otimes_{\mathcal{O}_{X^{[3]}}} \mathcal{O}_X \rightarrow L^2 \rightarrow 0. \quad (78)$$

Cela termine la démonstration de la proposition 4.3. \square

Preuve du lemme 4.9 :

(i) Soit $x \in X \subset X^{[3]}$. Les points de la fibre en x du morphisme $\pi_{32} : X^{[3,2]} \rightarrow X^{[3]}$ sont donnés par les schémas de longueur 2 inclus dans $s = \text{Spec } \mathcal{O}_X / \mathfrak{m}_x^2$. Ces sous-schémas sont de la forme $b = \text{Spec } \mathcal{O}_X / \mathfrak{m}_x^2, \ell_x$, pour une droite ℓ_x qui passe par x . On déduit alors que géométriquement la fibre en x du morphisme π_{32} est \mathbb{P}_1 . Pour démontrer que c'est aussi schématiquement \mathbb{P}_1 il suffit de démontrer que cette fibre est lisse en tout point. L'énoncé est local et analytique. On peut supposer que $X = \mathbb{P}_2$, avec les coordonnées $(U : V : W)$, x est le point $(0 : 0 : 1)$ et $\ell_x = V$, donc $b = \text{Spec } \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2} / (U^2, V)$. On utilise l'affirmation suivante, tautologique. Soit L un fibré inversible sur X et $s \in H^0(X, L)$ une section globale. On considère le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \Xi & \xrightarrow{p_{21}} & X \\ \pi_{21} \downarrow & & \\ X^{[2]} & & . \end{array}$$

Par définition $L^{[2]} = \pi_{21*} p_{21}^* L$. L'image réciproque $p_{21}^* s \in H^0(\Xi, p_{21}^* L)$ est une section globale sur Ξ et s'identifie à une section $[s] \in H^0(X^{[2]}, L^{[2]})$.

Remarque 4.10 Soit $z \in X^{[2]}$ un point qui correspond à un sous-schéma de longueur 2, $Z \subset X$. Le sous-schéma $Z \subset X$ est contenu dans la courbe d'équation $s = 0$ si et seulement si la section $[s] \in H^0(X^{[2]}, L^{[2]})$ s'annule au point $z \in X^{[2]}$.

Preuve :

La section $[s]$ s'annule au point z si et seulement si $p_{21}^* s$ s'annule sur la fibre $Z \subset \Xi$. Ceci équivaut à l'annulation de s en $Z \subset X$. \square

Ici $L = \mathcal{O}(2)$. Par suite, comme s est d'idéal (U^2, UV, V^2) dans \mathbb{P}_2 , la fibre en s du morphisme π_{32} est donnée par le fermé d'équations $[U^2], [UV], [V^2]$ dans $\mathbb{P}_2^{[2]}$. Le point b admet la paramétrisation locale suivante :

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^4 &\rightarrow \mathbb{P}_2^{[2]} \\ (\alpha, \beta, \lambda, \mu) &\rightarrow \mathcal{I}_Z = (V - \lambda U - \mu W, U^2 - \alpha U W - \beta W^2). \end{aligned} \quad (79)$$

Les sections $[UW]$ et $[W^2]$ engendrent le faisceau localement libre $L^{[2]}$ au voisinage de b et on a :

$$\begin{aligned} [U^2] &= \alpha[UW] + \beta[W^2] \\ [UV] &= (\lambda\alpha + \mu)[UW] + \lambda\beta[W^2] \\ [V^2] &= (\lambda^2\alpha + 2\lambda\mu)[UW] + (\lambda^2\beta + \mu^2)[W^2]. \end{aligned}$$

On obtient que la fibre en s est donnée dans la paramétrisation de b par les équations :

$$\alpha = \beta = \lambda\alpha + \mu = \lambda\beta = \lambda^2\alpha + 2\lambda\mu = \lambda^2\beta + \mu^2 = 0,$$

équivalentes à

$$\alpha = \beta = \mu = 0.$$

Par conséquent la fibre en s est lisse de dimension 1 au voisinage de b , ce qu'il fallait démontrer.

(ii) On applique le résultat connu :

Lemme 4.11 *Soit B une algèbre, A une B -algèbre plate, M un A -module et N un B -module. Alors :*

$$\mathrm{Tor}_q^A(A \otimes_B N, M) = \mathrm{Tor}_q^B(N, M),$$

pour $A = \mathcal{O}_{X^{[3]} \times X^{[2]}}$, $B = \mathcal{O}_{X^{[3]}}$, $M = \mathcal{O}_{X^{[3,2]}}$, $N = \mathcal{O}_X$. On trouve :

$$\underline{\mathrm{Tor}}_q^{\mathcal{O}_{X^{[3]}}}(\mathcal{O}_{X^{[3,2]}}, \mathcal{O}_X) = \underline{\mathrm{Tor}}_q^{\mathcal{O}_{X^{[3]} \times X^{[2]}}}(\mathcal{O}_{X^{[3,2]}}, \mathcal{O}_{X \times X^{[2]}}).$$

On calculera le membre de droite en écrivant explicitement les équations de $X^{[3,2]}$ et $X \times X^{[2]}$ dans $X^{[3]} \times X^{[2]}$. On se place au voisinage du point $(s, b) \in X^{[3]} \times X^{[2]}$ considéré au point (i). Le point b admet la paramétrisation locale (79). Le lemme suivant donne une paramétrisation locale du point $s \in X^{[3]}$:

Lemme 4.12 *Considérons une application linéaire $m : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^3$. Les mineurs 2×2 de l'application linéaire*

$$a(m) = \begin{pmatrix} V & 0 \\ -U & V \\ 0 & -U \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_1 & m_4 \\ m_2 & m_5 \\ m_3 & m_6 \end{pmatrix} W \quad (80)$$

définissent l'idéal d'un point s_m de $X^{[3]}$. Le morphisme $m \mapsto s_m$ est un isomorphisme d'un voisinage de 0 dans $L(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^3)$ sur un voisinage de s dans $X^{[3]}$.

Preuve :

Prenons le complexe

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(-3)^2 \xrightarrow{a} \mathcal{O}(-2)^3 \xrightarrow{b} \mathcal{O} \rightarrow 0, \quad (81)$$

où b est défini par les mineurs 2×2 de l'application a . Le morphisme a est injectif et par construction on a $\mathrm{Ker} b = \mathrm{Im} a$. Le faisceau $\mathcal{O}/\mathrm{Im} b$ est de rang 0, $c_1 = 0$ et $\chi = 3$. Il est par suite l'anneau structural d'un schéma s_m de longueur 3 sur X . On obtient alors un morphisme $m \mapsto s_m$ de $L(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^3)$ dans $X^{[3]}$. Pour la construction du morphisme réciproque on considère l'ouvert $X^{[3]} \setminus (\mathcal{H} \cup \partial_W)$, où \mathcal{H} est l'hypersurface des schémas dont le support se trouve sur une droite et ∂_W est le fermé des schémas dont le support rencontre la droite à l'infini $W = 0$. D'après la suite spectrale de Beilinson ([O-S-S, page 240]) on trouve que l'idéal de tout point de $X^{[3]} \setminus \mathcal{H}$ est le conoyau d'un morphisme injectif $a : \mathcal{O}(-3)^2 \rightarrow \mathcal{O}(-2)^3$, donné par une matrice $a = A + B \cdot W$, où A est une forme linéaire en U et V , et B une matrice constante. Si en plus le point se trouve dans $X^{[3]} \setminus \partial_W$, le morphisme a doit être injectif en restriction à chaque point de la droite $W = 0$. Par conséquent l'application linéaire définie par la matrice A est injective en restriction à tout point de la droite $W = 0$. Alors la matrice A est conjuguée, par un unique élément du groupe $\mathrm{GL}(3) \times \mathrm{GL}(2)/\mathbb{C}^*$, avec la matrice

$$A_0 = \begin{pmatrix} V & 0 \\ -U & V \\ 0 & -U \end{pmatrix}.$$

En conclusion, l'idéal de tout point de $X^{[3]} \setminus (\mathcal{H} \cup \partial_W)$ est le conoyau d'un morphisme injectif $a = A_0 + B_0 \cdot W$, $B_0 \in L(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^3)$. L'application $X^{[3]} \setminus (\mathcal{H} \cup \partial_W) \rightarrow L(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^3)$ donnée par $z \mapsto B_0$ constitue le morphisme réciproque recherché. \square

Donc le point $s \in X^{[3]}$ admet la paramétrisation locale suivante :

$$(m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6) \in \mathbb{C}^6 \rightarrow \mathcal{I}_Z = (M_{23}, M_{13}, M_{12}),$$

où M_{23}, M_{13}, M_{12} sont les mineurs 2×2 de la matrice (80). Au voisinage de s , les points de $X^{[3]}$ de la forme \mathfrak{m}_y^2 ont pour idéal $(U - m_2W, V + m_1W)^2$ et sont donnés par les équations :

$$m_1 - m_5 = m_2 - m_6 = m_3 = m_4 = 0. \quad (82)$$

On a trouvé ainsi les équations de $X \times X^{[2]}$ dans $X^{[3]} \times X^{[2]}$ au voisinage de (s, b) . D'après la remarque 4.10 les équations du fermé $X^{[3,2]}$ dans $X^{[3]} \times X^{[2]}$ sont $[M_{23}] = [M_{13}] = [M_{12}] = 0$. On exprime $[M_{23}], [M_{13}], [M_{12}]$ dans la base donnée par $[UW], [W^2]$:

$$\begin{aligned} [M_{23}] &= [UW](-m_2 - m_6 + \alpha - m_3\lambda) + [W^2](\beta - m_3\mu + m_2m_6 - m_3m_5) \\ [M_{13}] &= [UW](\lambda\alpha + \mu - m_1 + \lambda m_6) + [W^2](\lambda\beta + \mu m_6 + m_1m_6 - m_3m_4) \\ [M_{12}] &= [UW](\lambda^2\alpha + 2\lambda\mu + m_4 + \lambda m_1 + \lambda m_5) + [W^2](\lambda^2\beta + \mu^2 + \mu m_1 + \mu m_5 + m_1m_5 - m_2m_4). \end{aligned}$$

Par conséquent les équations de $X^{[3,2]}$ dans $X^{[3]} \times X^{[2]}$ sont ces 6 coefficients. Les différentielles des quatre d'entre eux

$$\begin{aligned} & -m_2 - m_6 + \alpha - m_3\lambda \\ & \lambda\alpha + \mu - m_1 + \lambda m_6 \\ & \lambda^2\alpha + 2\lambda\mu + m_4 + \lambda m_1 + \lambda m_5 \\ & \beta - m_3\mu + m_2m_6 - m_3m_5 \end{aligned} \quad (83)$$

sont respectivement $-m_2 - m_6 + \alpha, \mu - m_1, m_4, \beta$, linéairement indépendantes. Puisque $X^{[3,2]}$ est de codimension 4 dans $X^{[3]} \times X^{[2]}$, les équations (83) définissent $X^{[3,2]}$ au voisinage de (s, b) .

On considère les faisceaux F et L sur $X^{[3]} \times X^{[2]}$ libres dans le voisinage de $(s, b) \in X^{[3]} \times X^{[2]}$, de rangs respectifs 3 et 1, et on prend les sections locales

$$f = (m_1 - m_5, m_2 - m_6, m_3), \quad (84)$$

et $l = m_4$ dans F^* respectivement L^* . D'après la présentation (82) le faisceau $\mathcal{O}_{X \times X^{[2]}}$ a une résolution de Koszul $\Lambda^\bullet(F \oplus L) \rightarrow \mathcal{O}_{X \times X^{[2]}}$ sur $X^{[3]} \times X^{[2]}$. En tenant compte du fait que $\Lambda^i L = 0$ pour $i \geq 2$, cette résolution $\Lambda^\bullet(F \oplus L)$ s'écrit :

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow L \otimes \Lambda^3 F \xrightarrow{\begin{pmatrix} f \\ e \end{pmatrix}} L \otimes \Lambda^2 F \oplus \Lambda^3 F \xrightarrow{\begin{pmatrix} f & 0 \\ e & f \end{pmatrix}} L \otimes F \oplus \Lambda^2 F \xrightarrow{\begin{pmatrix} f & 0 \\ e & f \end{pmatrix}} \\ \rightarrow L \oplus F \xrightarrow{\begin{pmatrix} e & f \end{pmatrix}} \mathcal{O}_{X^{[3]} \times X^{[2]}} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Le complexe $\Lambda^\bullet(F \oplus L)$ rentre dans une suite exacte de complexes :

$$0 \rightarrow \Lambda^\bullet(F) \rightarrow \Lambda^\bullet(F \oplus L) \rightarrow L \otimes \Lambda^\bullet(F)[1] \rightarrow 0,$$

d'où l'exactitude de la suite exacte longue :

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow H_q(\Lambda^\bullet(F) \otimes_{\mathcal{O}_{X^{[3]} \times X^{[2]}}} \mathcal{O}_{X^{[3,2]}}) \rightarrow \underline{\text{Tor}}_q^{\mathcal{O}_{X^{[3]} \times X^{[2]}}}(\mathcal{O}_{X^{[3,2]}}, \mathcal{O}_{X \times X^{[2]}}) \rightarrow \\ \rightarrow L \otimes H_{q-1}(\Lambda^\bullet(F) \otimes_{\mathcal{O}_{X^{[3]} \times X^{[2]}}} \mathcal{O}_{X^{[3,2]}}) \rightarrow \cdots \end{aligned} \quad (85)$$

Les équations (84) et les différentielles des équations (83) sont linéairement indépendantes. Puisque Y est de dimension 3 et les équations (84), (83) s'annulent sur Y , on trouve que Y est défini par ces 7 équations. Donc

$$\Lambda^\bullet(F) \otimes_{\mathcal{O}_{X^{[3]} \times X^{[2]}}} \mathcal{O}_{X^{[3,2]}}$$

est une résolution pour \mathcal{O}_Y et la suite (85) se réduit à :

$$0 \rightarrow \underline{\text{Tor}}_1^{\mathcal{O}_{X^{[3]} \times X^{[2]}}}(\mathcal{O}_{X^{[3,2]}}, \mathcal{O}_{X \times X^{[2]}}) \rightarrow L|_Y \xrightarrow{l} \mathcal{O}_Y \rightarrow \underline{\text{Tor}}_0^{\mathcal{O}_{X^{[3]} \times X^{[2]}}}(\mathcal{O}_{X^{[3,2]}}, \mathcal{O}_{X \times X^{[2]}}) \rightarrow 0.$$

L'équation $l = m_4$ est vérifiée sur Y .

Alors $\underline{\text{Tor}}_0^{\mathcal{O}_{X^{[3]} \times X^{[2]}}}(\mathcal{O}_{X^{[3,2]}}, \mathcal{O}_{X \times X^{[2]}})$, $\underline{\text{Tor}}_1^{\mathcal{O}_{X^{[3]} \times X^{[2]}}}(\mathcal{O}_{X^{[3,2]}}, \mathcal{O}_{X \times X^{[2]}})$ sont localement libres de rang 1 au voisinage du point $(s, b) \in Y$. Par l'homogénéité de l'action du groupe $\text{PGL}(3)$, on obtient l'énoncé global.

(iii) On a démontré que $\underline{\text{Tor}}_q^{\mathcal{O}_{X^{[3]} \times X^{[2]}}}(\mathcal{O}_{X^{[3,2]}}, \mathcal{O}_{X \times X^{[2]}})$ est respectivement \mathcal{O}_Y pour $q = 0$, M pour $q = 1$ et 0 pour $q > 0$. On obtient l'égalité dans le groupe de K-théorie $K(X \times X^{[2]})$:

$$[\mathcal{O}_Y] - [M] = (i \times id)^*[\mathcal{O}_{X^{[3,2]}}]. \quad (86)$$

où $(i \times id)$ est le morphisme $X \times X^{[2]} \rightarrow X^{[3]} \times X^{[2]}$ et $[\mathcal{O}_{X^{[3,2]}}]$ la classe du faisceau $\mathcal{O}_{X^{[3,2]}}$ dans le groupe de K-théorie $K(X^{[3]} \times X^{[2]})$.

Puisque le morphisme $j : Y \rightarrow X \times X^{[2]}$ est une immersion fermée, on peut ré-écrire l'égalité (86) sous la forme

$$j_!(1 - [M]) = (i \times id)^*[\mathcal{O}_{X^{[3,2]}}]. \quad (87)$$

On applique le morphisme $K(X \times X^{[2]}) \xrightarrow{ch} H^*(X \times X^{[2]})$ à l'égalité (87). On utilise la formule de Riemann-Roch pour le membre de gauche et la functorialité des classes de Chern pour le membre de droite. On obtient l'égalité dans $H^*(X \times X^{[2]})$:

$$j_* \left(\frac{1 - e^{c_1(M)}}{tdN_{Y/X \times X^{[2]}}} \right) = (i \times id)^* ch(\mathcal{O}_{X^{[3,2]}}). \quad (88)$$

On applique à l'égalité (88) la projection $H^*(X \times X^{[2]}) \xrightarrow{p_*} H^{*-4}(X)$ et on considère l'égalité obtenue dans $H^0(X)$. Le diagramme cartésien :

$$\begin{array}{ccc} X \times X^{[2]} & \xrightarrow{i \times id} & X^{[3]} \times X^{[2]} \\ p \downarrow & & \downarrow pr \\ X & \xrightarrow{i} & X^{[3]} \end{array}$$

implique $p_*(i \times id)^* = i^* pr_*$. On obtient l'égalité dans $H^0(X)$:

$$-p_*(c_1(M)) = i^*(pr_*([X^{[3,2]}])).$$

Le morphisme $X^{[3,2]} \rightarrow X^{[3]}$ est fini de degré 3. Alors $p_*(c_1(M)) = -3$, ce qu'il fallait démontrer. \square

Preuve du lemme 4.4 :

L'application $M = (\pi, \tilde{\mu}) : \Sigma \rightarrow X^{[3]} \times X$ a son image dans la variété d'incidence $\Xi = X^{[3,1]} \subset X^{[3]} \times X$. On obtient un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \Sigma & \xrightarrow{M} & \Xi \xrightarrow{p_{31}} X \\ & \searrow \pi & \downarrow \pi_{31} \\ & & X^{[3]} \end{array} .$$

Il en résulte un morphisme de faisceaux sur X :

$$L^{2[3]} = \pi_{31*} p_{31}^* L^2 \rightarrow \pi_{31*} (M_* M^*) p_{31}^* L^2 = (\pi_{31*} M_*) (M^* p_{31}^* L^2) = \pi_* \tilde{\mu}^* L^2.$$

Puisque $\tilde{\mu}$ coïncide avec $\mu : \partial X_*^{[3]} \rightarrow X$ au-dessus de $\partial X_*^{[3]}$, le morphisme obtenu prolonge le morphisme de la suite exacte (10). \square

Preuve du lemme 4.5 :

On construit le morphisme (68) en utilisant le diagramme (72). Le morphisme $\tilde{\pi}_{32}$ vérifie par construction $\tilde{\pi}_{32*} \mathcal{O}_D = \mathcal{O}_\Sigma$. Le faisceau $\tilde{\mu}^* L^2$ est localement libre sur Σ . On obtient $\tilde{\pi}_{32*} \tilde{\pi}_{32}^* \tilde{\mu}^* L^2 = \tilde{\mu}^* L^2$. Alors :

$$\pi_* \tilde{\mu}^* L^2 = \pi_* \tilde{\pi}_{32*} \tilde{\pi}_{32}^* \tilde{\mu}^* L^2 = \pi_{32*} \tilde{\mu}^* L^2 = \pi_{32*} p_{32}^* HC^* L^2.$$

Le faisceau L^2 sur X est la restriction de la diagonale X au faisceau \mathcal{D}_2 sur $S^2 X$. Alors $HC^* L^2 = \mathcal{D}_2|_{\partial X^{[2]}}$. Par conséquent :

$$\pi_* \tilde{\mu}^* L^2 = \pi_{32*} (p_{32}^* \mathcal{D}_2|_D). \quad (89)$$

Par définition $\mathcal{D}_2^{[3]} = \pi_{32*} p_{32}^* \mathcal{D}_2$ pour les morphismes du diagramme (9). Le morphisme (68) est le morphisme canonique

$$\pi_{32*} (p_{32}^* \mathcal{D}_2) \rightarrow \pi_{32*} (p_{32}^* \mathcal{D}_2|_D). \quad (90)$$

Puisque $\tilde{\mu} : D \rightarrow X$ coïncide avec $\mu : \partial X_*^{[3]} \rightarrow X$ au-dessus de $\partial X_*^{[3]}$, le morphisme (68) prolonge le morphisme de la suite exacte (10). Pour montrer la surjectivité, on rappelle qu'on a démontré dans la preuve de la proposition 4.3 que le morphisme π_{32} était fini au-dessus de $X^{[3]} \setminus X$. Par conséquent le morphisme (90) est surjectif. \square

5 Calcul de $H^*(X^{[3]}, S^2 L^{[3]})$

On calculera dans cette section $H^*(X^{[3]}, S^2 L^{[3]})$ à partir de la suite exacte du théorème 4.2. On commence par calculer la cohomologie des termes concernés.

Proposition 5.1 *On a*

$$H^*(X^{[3]}, L^{2[3]}) = S^2 H^*(\mathcal{O}_X) \otimes H^*(L^2). \quad (91)$$

Preuve :

C'est le résultat (2) pour $k = 1$, $n = 3$, $A = \mathcal{O}$. \square

Proposition 5.2 *On a*

$$H^*(X^{[3]}, \mathcal{D}_2^{[3]}) = H^*(X, \mathcal{O}_X) \otimes H^*(X^{[2]}, \mathcal{D}_2).$$

Preuve :

On rappelle que $\mathcal{D}_2^{[3]} = \pi_{32*} \mathcal{L}_2$, $\mathcal{L}_2 = p_{32}^* \mathcal{D}_2$, où π_{32}, p_{32} sont les morphismes du diagramme (9). On a démontré que les fibres du morphisme π_{32} sont finies au-dessus de l'ouvert $X^{[3]} \setminus X$, où X paramètre les schémas du type $\{m_x^2\}$. On a démontré dans le lemme 4.9(i) que les fibres du morphisme π_{32} au-dessus de X sont \mathbb{P}_1 et dans le lemme 4.8 que la restriction du fibré inversible \mathcal{L}_2 à ces fibres est le fibré inversible trivial. Alors $R^q \pi_{32*} \mathcal{L}_2 = 0$ pour $q > 0$. D'après la suite spectrale de Leray on obtient :

$$H^q(X^{[3]}, \mathcal{D}_2^{[3]}) = H^q(X^{[3,2]}, \mathcal{L}_2). \quad (92)$$

On considère le morphisme $\tilde{p}_{32} = (a, p_{32}) : X^{[3,2]} \rightarrow X \times X^{[2]}$, où le morphisme a associe au couple $(Z, Z') \in X^{[3]} \times X^{[2]}$ le point $HC(Z) - HC(Z')$, HC étant le morphisme de Hilbert-Chow. Mais $\mathcal{L}_2 = \tilde{p}_{32}^*(\mathcal{O} \boxtimes \mathcal{D}_2)$. On a démontré dans [D2] que

$$R^q \tilde{p}_{32*} \mathcal{O}_{X^{[3,2]}} = \begin{cases} 0 & \text{si } q > 0 \\ \mathcal{O}_{X \times X^{[2]}} & \text{si } q = 0. \end{cases}$$

D'après la suite spectrale de Leray on obtient

$$H^q(X^{[3,2]}, \mathcal{L}_2) = H^q(X \times X^{[2]}, \mathcal{O} \boxtimes \mathcal{D}_2). \quad (93)$$

Les égalités (92), (93) et le théorème de Künneth impliquent le résultat. \square

Proposition 5.3 *On a*

$$H^*(X^{[3]}, \pi_* \tilde{\mu}^* L^2) = H^*(X, \mathcal{O}_X) \otimes H^*(X, L^2). \quad (94)$$

Preuve :

Soit $HC : X^{[3]} \rightarrow S^3 X$ le morphisme de Hilbert-Chow. On considère le morphisme $\nu = (a, \tilde{\mu}) : \Sigma \rightarrow X \times X$, où a est le morphisme $\Sigma \rightarrow X$ donné par $a(s) = HC(\pi(s)) - 2\tilde{\mu}(s)$. On a

$$\pi_* \tilde{\mu}^* L^2 = \pi_* \nu^*(\mathcal{O} \boxtimes L^2).$$

On démontre :

Lemme 5.4 *On a :*

$$R^q \nu_* \mathcal{O}_\Sigma = \begin{cases} 0 & \text{si } q > 0 \\ \mathcal{O}_{X \times X} & \text{si } q = 0. \end{cases}$$

En appliquant le lemme on trouve :

$$R^q \nu_* \nu^*(\mathcal{O} \boxtimes L^2) = \begin{cases} 0 & \text{si } q > 0 \\ \mathcal{O} \boxtimes L^2 & \text{si } q = 0. \end{cases} \quad (95)$$

Alors :

$$H^*(X^{[3]}, \pi_* \nu^*(\mathcal{O} \boxtimes L^2)) = H^*(\Sigma, \nu^*(\mathcal{O} \boxtimes L^2)) = H^*(X \times X, \mathcal{O} \boxtimes L^2) = H^*(X, \mathcal{O}) \otimes H^*(X, L^2),$$

en appliquant le fait que le morphisme π est fini, la relation (95) et le théorème de Künneth. \square

Preuve du lemme 5.4 :

Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\tilde{\nu}} & X \times \partial X^{[2]} \\ \tilde{\pi}_{32} \downarrow & & \downarrow b \\ \Sigma & \xrightarrow{\nu} & X \times X \\ \pi \downarrow & & \\ \partial X^{[3]} & & \end{array}$$

où $\tilde{\nu} = (a \circ \tilde{\pi}_{32}, p_{32})$, $b = (id, pr)$, et $pr : \partial X^{[2]} \rightarrow X$ est le morphisme qui associe au schéma double son support. On a vu dans la preuve de la proposition 4.3 et dans le lemme 4.9(i) que les fibres du morphisme $\pi_{32} = \pi \circ \tilde{\pi}_{32}$ sont des ensembles finis ou l'espace projectif \mathbb{P}_1 . Par suite les fibres du morphisme $\tilde{\pi}_{32}$ sont des points ou l'espace projectif \mathbb{P}_1 . Donc $R^q \tilde{\pi}_{32*} \mathcal{O}_D = 0$ pour $q > 0$. D'après la construction de Σ de la preuve du lemme 4.1 on obtient $\tilde{\pi}_{32*} \mathcal{O}_D = \mathcal{O}_\Sigma$. La suite spectrale de Leray pour $R(\nu \circ \tilde{\pi}_{32})_* = R\nu_* \circ R\tilde{\pi}_{32*}$ implique :

$$R^q \nu_* \mathcal{O}_\Sigma = R^q (\nu \circ \tilde{\pi}_{32})_* \mathcal{O}_D, \quad \text{pour } q \geq 0. \quad (96)$$

Le morphisme $\tilde{\nu}$ est un isomorphisme au-dessus des points (X, Z') avec $x \neq \text{supp } Z'$ (son inverse est donné par $(x, Z') \mapsto (\mathcal{O}_x \oplus \mathcal{O}_{Z'}, Z')$). On utilise le

Lemme 5.5 *Soit $Z' \in \partial X^{[2]}$ de support x . La fibre $F(x, Z')$ du morphisme $\tilde{\nu}$ dans (x, Z') est une courbe lisse et rationnelle.*

Alors $R^q \tilde{\nu}_* \mathcal{O}_D = 0$ pour $q > 0$. Le morphisme $\tilde{\nu}$ est birationnel et la variété $X \times \partial X^{[2]}$ est lisse, donc normale. D'après Zariski's Main Theorem ([Hart], III 11.4) on a $\tilde{\nu}_* \mathcal{O}_D = \mathcal{O}_{X \times \partial X^{[2]}}$. La suite spectrale de Leray pour $R(b \circ \tilde{\nu})_* = Rb_* \circ R\tilde{\nu}_*$ nous donne

$$R^q (b \circ \tilde{\nu})_* \mathcal{O}_D = R^q b_* \mathcal{O}_{X \times \partial X^{[2]}}. \quad (97)$$

Finalement b est une fibration à fibres \mathbb{P}_1 . Alors

$$R^q b_* \mathcal{O}_{X \times \partial X^{[2]}} = \begin{cases} 0 & \text{si } q > 0 \\ \mathcal{O}_{X \times X} & \text{si } q = 0. \end{cases} \quad (98)$$

Les relations (96), (97) et (98) nous aident à conclure la preuve du lemme 5.4. \square

Preuve du lemme 5.5 :

C'est un énoncé relatif à \mathcal{O}_X/m_x^3 , donc on peut supposer $X = \mathbb{P}_2$. On note $(U : V : W)$ les coordonnées homogènes sur \mathbb{P}_2 et $u = \frac{U}{W}, v = \frac{V}{W}$. Par homogénéité on peut supposer $x = (0 : 0 : 1)$ et $\mathcal{I}_{Z'} = (u^2, v)$. Les schémas de longueur 3 à support dans x contenant Z' sont ceux d'idéal $(v - Au^2, u^3), A \in \mathbb{C}$ ou (u^2, uv, v^2) . Il résulte que la fibre géométrique $F(x)$ est $\mathbb{A}^1 \cup \{*\}$. Pour démontrer que $F(x)$ est schématiquement \mathbb{P}_1 , il suffit de démontrer que $F(x)$ est lisse au voisinage de chacun de ses points. Les points d'idéal $(v - Au^2, u^3), A \neq 0$, sont dans la même orbite de l'action de $\text{PGL}(3)$. Tout voisinage du schéma (v, u^3) contient des points $(v - Au^2, u^3)$. Il suffit donc de démontrer la lissité dans le voisinage des points d'idéal (v, u^3) et (u^2, uv, v^2) .

On utilise la paramétrisation du lemme 4.7. Les schémas du voisinage du point (v, u^3) de $X^{[3]}$ qui contiennent le schéma (v, u^2) , vérifient les équations (75) avec $\lambda = \mu = \alpha = 0$. Ils sont donc les points d'équation $B = C = q = r = 0$, c'est-à-dire les schémas $(v - Au^2, u^3 + pu^2)$. L'image par \tilde{v} d'un tel schéma dans $X \times \partial X^{[2]}$ est $((-p, -Ap^2), Z')$. Pour que l'image soit (x, Z') , on doit avoir $p = Ap^2 = 0$. Alors $F(x, Z')$ est d'équation $B = C = p = q = r = 0$ au voisinage de du point (v, u^3) , donc elle est lisse.

Dans le voisinage du point $(U^2, UV, V^2) = (u^2, uv, v^2)$ on utilise la paramétrisation du lemme 4.12. Les schémas du voisinage qui contiennent le schéma $(V, U^2) = (v, u^2)$ vérifient les équations (83) avec $\lambda = \mu = \alpha = \beta = 0$, c'est-à-dire :

$$m_2 + m_6 = m_1 = m_4 = m_2m_6 - m_3m_5 = 0.$$

Elles sont en correspondance avec les schémas d'idéal $(v(v + m_5), v(u + m_2), u^2 - vm_3)$. L'image par \tilde{v} d'un tel schéma est $((-m_2, -m_5), Z')$. Alors $F(x, Z')$ est d'équations $m_1 = m_2 = m_4 = m_5 = m_6$ au voisinage du point (u^2, uv, v^2) , donc elle est lisse. \square

On rappelle la convention faite dans la section 3 d'omettre l'espace X dans la notation $H^*(X, L)$ pour tout faisceau inversible L .

Preuve du théorème 1.2 :

Le théorème 4.2 nous conduit à une suite longue de cohomologie :

$$\cdots \rightarrow H^*(X^{[3]}, S^2L^{[3]}) \rightarrow H^*(X^{[3]}, \mathcal{D}_2^{[3]}) \oplus H^*(X^{[3]}, L^{2[3]}) \rightarrow H^*(X^{[3]}, \pi_*\tilde{\mu}^*L^2) \rightarrow \cdots$$

D'après les propositions 5.1, 5.2, le lemme 3.2 et la proposition 5.3 on peut ré-écrire cette suite sous la forme :

$$\cdots \rightarrow H^*(X^{[3]}, S^2L^{[3]}) \rightarrow H^*(\mathcal{O}) \otimes S^2H^*(L) \bigoplus S^2H^*(\mathcal{O}) \otimes H^*(L^2) \rightarrow H^*(\mathcal{O}) \otimes H^*(L^2) \rightarrow \cdots \quad (99)$$

Lemme 5.6 *Le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} H^*(\mathcal{O}) \otimes S^2H^*(L) & & \\ \text{can} \downarrow & \searrow id & \\ H^*(X^{[3]}, S^2L^{[3]}) & \xrightarrow{u} & H^*(\mathcal{D}_2^{[3]}) = H^*(\mathcal{O}) \otimes S^2H^*(L), \end{array}$$

est commutatif.

Preuve :

Le morphisme $S^2L^{[3]} \rightarrow \mathcal{D}_2^{[3]}$ s'écrit $\pi_*\mathcal{O}_{S^2(\Xi)} \rightarrow \pi_{32*}\mathcal{O}_{X^{[3,2]}}$ pour $L = \mathcal{O}$, dans les notations du diagramme (4). On obtient un morphisme $U : X^{[3,2]} \rightarrow S^2(\Xi)$ qui induit en cohomologie l'application u .

L'application *can* est induite par définition par le morphisme $P : S^2(\Xi) \rightarrow X \times S^2X$.

L'application *id* est induite, d'après la proposition 5.2, par le morphisme $X^{[3,2]} \xrightarrow{(a, HC \circ p_{32})} X \times S^2X$. Il suffit de démontrer que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X \times S^2X & & \\ \uparrow P & \nwarrow (a, HC \circ p_{32}) & \\ S^2(\Xi) & \xleftarrow{U} & X^{[3,2]} \end{array}$$

est commutatif. Il suffit de le vérifier au-dessus de l'ouvert dense $\pi_{32}^{-1}(X_{**}^{[3]})$, où $X_{**}^{[3]}$ est l'ouvert des schémas lisses de $X^{[3]}$. Ici l'application U est définie par :

$$((x_1, x_2, x_3), (x_i, x_j)) \mapsto ((x_1, x_2, x_3), (x_i + x_j)), \quad i \neq j, \quad i, j \in \{1, 2, 3\}.$$

La commutativité du diagramme en est une conséquence. \square

Le lemme implique la décomposition en somme directe

$$H^*(X^{[3]}, S^2 L^{[3]}) = H^*(\mathcal{O}) \otimes S^2 H^*(L) \oplus K^*,$$

et la suite (99) peut s'écrire :

$$\dots K^* \rightarrow S^2 H^*(\mathcal{O}) \otimes H^*(L^2) \rightarrow H^*(\mathcal{O}) \otimes S^2 H^*(L^2) \rightarrow K^{*+1} \rightarrow \dots$$

Afin de comprendre le morphisme $S^2 H^*(\mathcal{O}) \otimes H^*(L^2) \xrightarrow{b} H^*(\mathcal{O}) \otimes H^*(L^2)$ on considère le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \Xi & \xrightarrow{c} & S^2 X \times X \\ (\pi, \tilde{\mu}) \uparrow & & \uparrow d \\ \Sigma & \xrightarrow[\nu=(a, \tilde{\mu})]{} & X \times X, \end{array} \quad (100)$$

où :

- $\Xi = X^{[3,1]}$ est la variété d'incidence définie à l'aide du diagramme (1)
- le morphisme c associe au couple $(Z, x) \in X^{[3]} \times X$ le point $(HC(Z) - x, x) \in S^2 X \times X$
- le morphisme d est défini par $d(x, y) = (x + y, y)$.

Le diagramme (100) est commutatif par définition des morphismes. On a démontré dans [D2] que l'isomorphisme (91) provient de l'identification :

$$H^*(X^{[3]}, L^{2[3]}) = H^*(\Xi, c^*(\mathcal{O} \boxtimes L^2)) = H^*(S^2 X \times X, \mathcal{O} \boxtimes L^2).$$

On a démontré dans la proposition 5.3 que l'isomorphisme (94) provient de l'identification :

$$H^*(X^{[3]}, \pi_* \tilde{\mu}^* L^2) = H^*(\Sigma, \nu^*(\mathcal{O} \boxtimes L^2)) = H^*(X \times X, \mathcal{O} \boxtimes L^2). \quad (101)$$

En utilisant le diagramme commutatif (100) et les identifications (94), (101) on déduit que le morphisme $S^2 H^*(\mathcal{O}) \otimes H^*(L^2) \rightarrow H^*(\mathcal{O}) \otimes H^*(L^2)$ est le morphisme

$$d^* : H^*(S^2 X \times X, \mathcal{O} \boxtimes L^2) \rightarrow H^*(X \times X, \mathcal{O} \boxtimes L^2).$$

D'après la formule de Künneth il s'écrit :

$$uv \otimes \alpha \rightarrow u \otimes v\alpha + (-1)^{pq} v \otimes u\alpha,$$

pour $u \in H^p(\mathcal{O}_X)$, $v \in H^q(\mathcal{O}_X)$, $\alpha \in H^*(L^2)$. En particulier ce morphisme est surjectif : le morphisme

$$H^*(\mathcal{O}) \otimes H^*(L) \rightarrow S^2 H^*(\mathcal{O}) \otimes H^*(L) \quad (102)$$

donné par

$$u \otimes \alpha \mapsto (1 \cdot u) \otimes \alpha - \frac{1}{2} 1 \otimes u\alpha$$

est une section de ce morphisme. Alors $K^* = \text{Ker } b$, d'où la conclusion. \square

Preuve du théorème 1.7 :

On tensorise la suite exacte du théorème 4.2 par le faisceau inversible \mathcal{D}_3^A sur $X^{[3]}$. De la même manière que les énoncés 5.1, 5.2, 5.3 on prouve

$$\begin{aligned} H^*(X^{[3]}, L^{2[3]} \otimes \mathcal{D}_3^A) &= S^2 H^*(X, A) \otimes H^*(X, L^2 \otimes A), \\ H^*(X^{[3]}, \mathcal{D}_2^{[3]} \otimes \mathcal{D}_3^A) &= H^*(X, A) \otimes S^2 H^*(X, L \otimes A), \\ H^*(X^{[3]}, \pi_* \tilde{\mu}^* L^2 \otimes \mathcal{D}_3^A) &= H^*(X, A) \otimes H^*(X, L^2 \otimes A^2). \end{aligned}$$

On obtient la suite exacte longue :

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H^*(X^{[3]}, S^2 L^{[3]} \otimes \mathcal{D}_3^A) \rightarrow H^*(X, A) \otimes S^2 H^*(X, L \otimes A) \oplus S^2 H^*(X, A) \otimes H^*(X, L^2 \otimes A) \rightarrow \\ \rightarrow H^*(X, A) \otimes H^*(X, L^2 \otimes A^2) \rightarrow \dots \end{aligned} \quad (103)$$

De même que dans la preuve du lemme 5.6, la composition

$$H^*(X, A) \otimes S^2 H^*(X, L \otimes A) \xrightarrow{\text{can}} H^*(X^{[3]}, S^2 L^{[3]} \otimes \mathcal{D}_3^A) \rightarrow H^*(X, A) \otimes S^2 H^*(X, L \otimes A)$$

est un isomorphisme. Alors $H^*(X^{[3]}, S^2 L^{[3]} \otimes \mathcal{D}_3^A) = H^*(X, A) \otimes S^2 H^*(X, L \otimes A) \oplus K^*$, et la suite exacte (103) se transforme dans la suite exacte (15). \square

6 Le calcul de $H^0(X^{[n]}, S^2 L^{[n]})$

Cette section est consacrée au calcul de l'espace des sections globales $H^0(X^{[n]}, S^2 L^{[n]})$. On suppose partout dans cette section que $n \geq 2$. Puisque $X_*^{[n]}$ est un ouvert dont la codimension du complémentaire est égale à 2 dans la variété lisse $X^{[n]}$, et $S^2 L^{[n]}$ est localement libre, on a :

$$H^0(X^{[n]}, S^2 L^{[n]}) = H^0(X_*^{[n]}, S^2 L^{[n]}). \quad (104)$$

On calculera $H^0(X_*^{[n]}, S^2 L^{[n]})$ à partir de la suite exacte (10). On commence par calculer $H^0(X_*^{[n]}, \mathcal{D}_2^{[n]})$ et $H^0(X_*^{[n]}, \mu^* L^2|_{\partial X_*^{[n]}})$.

On note $L_i = pr_i^* L$ l'image réciproque de L par la projection $pr_i : X^n \rightarrow X$ et $L_{ij} = L_i \otimes L_j$. Par abus de notation on note également L_{ij} l'image réciproque $\rho^* L_{ij}$ sur B_*^n , ρ étant le morphisme du diagramme (8).

Proposition 6.1 *Le faisceau $\mathcal{D}_2^{[n]}$ rentre dans la suite exacte sur B_*^n :*

$$0 \rightarrow \mathcal{D}_2^{[n]} \rightarrow \sum_{i \neq k} L_{ik} \xrightarrow{a} \sum_{\substack{i < j \\ k \neq i, j}} L_{ik}|_{E_{ij}} \rightarrow 0, \quad (105)$$

où les indices i, j, k parcourent l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$ et l'application a est définie de la manière suivante

- la composante $L_{ik} \rightarrow L_{ik}|_{E_{ij}}$ est la restriction à E_{ij} du faisceau L_{ik} lorsque $i < j$
- la composante $L_{ik} \rightarrow L_{ik}|_{E_{ij}} = L_{jk}|_{E_{ij}}$ est (-1) fois la restriction à E_{ij} du faisceau L_{jk} lorsque $i < j$
- la composante $L_{ik} \rightarrow L_{ik}|_{E_{ij}}$ est nulle dans tous les autres cas.

Preuve :

On peut recouvrir B_*^n par les ouverts B_{ij}^n . Il suffit donc de prouver l'exactitude de la suite exacte en restriction à chacun de ces ouverts. On utilise l'identification du lemme 2.3. Pour simplifier on prend $\{i, j\} = \{1, 2\}$. D'après la relation (35) on a :

$$\mathcal{D}_2^{[n]} = \mathcal{D}_2 \boxtimes \mathcal{O} \oplus L^{[2]} \boxtimes \left(\sum_{i \geq 3} L_i \right) \oplus \mathcal{O} \boxtimes \left(\sum_{3 \leq i < j \leq n} L_{ij} \right).$$

Par définition on a :

$$\sum_{i \neq k} L_{ik} = \mathcal{D}_2 \boxtimes \mathcal{O} \oplus (L_1 \oplus L_2) \boxtimes \left(\sum_{i \geq 3} L_i \right) \oplus \mathcal{O} \boxtimes \left(\sum_{3 \leq i < j \leq n} L_{ij} \right),$$

$$\sum_{k \neq 1, 2} L_{1k}|_{E_{12}} = 0 \oplus L_1|_E \boxtimes \left(\sum_{i \geq 3} L_i \right) \oplus 0,$$

$$L_{ik}|_{E_{ij}} = 0 \quad \text{pour } \{i, j\} \neq \{1, 2\}.$$

La suite exacte (105) résulte de la suite exacte (21) sur B^2 :

$$0 \rightarrow L^{[2]} \rightarrow L_1 \oplus L_2 \rightarrow L_1|_E \rightarrow 0. \quad \square$$

Proposition 6.2 *Soit $n \geq 2$. On a*

$$H^0(X_*^{[n]}, \mathcal{D}_2^{[n]}) = S^2 H^0(X, L).$$

Preuve :

Le cas $n = 2$ a été examiné dans le lemme 3.2. On supposera dans la suite que $n > 2$. Le faisceau $\mathcal{D}_2^{[n]}$ sur B_*^n est l'image réciproque du faisceau $\mathcal{D}_2^{[n]}$ sur $X_*^{[n]}$. On trouve

$$H^0(X_*^{[n]}, \mathcal{D}_2^{[n]}) = H^0(B_*^n, \mathcal{D}_2^{[n]})^{\mathfrak{S}_n}.$$

Le morphisme $\rho : B_*^n \rightarrow X_*^n$ est l'éclatement des diagonales $\Delta_{ij} = \{x_i = x_j\}$ de l'ouvert X_*^n de X^n obtenu en gardant seulement les n -uples admettant au plus deux coordonnées égales. Alors $\rho_* \mathcal{O}_{B_*^n} = \mathcal{O}_{X_*^n}$, donc $H^0(B_*^n, L_{ik}) = H^0(X_*^n, L_{ik})$. Comme X_*^n est un grand ouvert de X^n (c'est-à-dire un ouvert dont le complémentaire est au moins de codimension 2) on trouve $H^0(X_*^n, L_{ik}) = H^0(X^n, L_{ik})$. Finalement, la formule de Künneth identifie $H^0(X^n, L_{ik}) = H^0(X, L) \otimes H^0(X, L)$, par le morphisme

$$X^n \xrightarrow{(pr_i, pr_k)} X \times X.$$

En conclusion, un élément de $H^0(B_*^n, L_{ik})$ correspond à un élément $a_{ik} \in H^0(X, L) \otimes H^0(X, L)$. Par construction, l'élément a_{ki} est le transposé de l'élément a_{ik} par l'action de \mathfrak{S}_2 sur $H^0(X, L) \otimes H^0(X, L)$.

De manière analogue l'application $E_{ij} \xrightarrow{\rho} \Delta_{ij*} \simeq X_*^{n-1}$ induit un isomorphisme

$$H^0(B_*^n, L_{ik}|_{E_{ij}}) \simeq H^0(X, L) \otimes H^0(X, L),$$

et le morphisme $L_{ik} \rightarrow L_{ik}|_{E_{ij}}$ induit un isomorphisme

$$H^0(X, L) \otimes H^0(X, L) \simeq H^0(X, L) \otimes H^0(X, L).$$

À partir de la suite exacte (105) on trouve qu'un élément de $H^0(B_*^n, \mathcal{D}_2^{[n]})$ s'identifie avec une suite d'éléments $(a_{ik})_{i \neq k} \in H^0(X, L) \otimes H^0(X, L)$ dont les images par l'application a sont nulles. Pour tout triplet de nombres distincts i, j, k on a :

$$a_{ik} = a_{jk}, a_{ij} = a_{kj}, a_{ji} = a_{ki}.$$

Donc $a_{ik} = a_{jk} = a_{ji} = a_{kj} = a_{ij}$, tous les éléments a_{ik} sont égaux et symétriques : $a_{ik} \in S^2 H^0(X, L) \subset H^0(X, L) \otimes H^0(X, L)$. Alors $H^0(B_*^n, \mathcal{D}_2^{[n]}) = S^2 H^0(X, L)$. L'action sur $S^2 H^0(X, L)$ par cette identification est triviale (\mathfrak{S}_n envoie a_{ik} sur $a_{\sigma(i)\sigma(k)}$). On obtient $H^0(X_*^{[n]}, \mathcal{D}_2^{[n]}) = S^2 H^0(X, L)$. \square

Proposition 6.3 *Soit $n \geq 2$. On a*

$$H^0(X_*^{[n]}, \mu^* L^2|_{\partial X_*^{[n]}}) = H^0(X, L^2).$$

Preuve :

La variété $\partial X_*^{[n]}$ coïncide avec l'ouvert U des points $(Z', x_3 + \dots + x_n)$ dans $\partial X^{[2]} \times S^{n-2} X$ pour lesquels les points x_i sont distincts entre eux et disjoints de $\text{supp } Z'$. On considère l'ouvert $V \subset X \times S^{n-2} X$ des points $(x_1, x_3 + \dots + x_n)$ tels que tous les x_i sont distincts. Le morphisme

$$\pi : U \rightarrow V, \quad (Z', x_3 + \dots + x_n) \mapsto (\text{supp } Z', x_3 + \dots + x_n)$$

est une fibration à fibres \mathbb{P}_1 , et $\mu = \pi \circ pr_1$. Alors

$$H^0(X_*^{[n]}, \mu^* L^2) = H^0(V, L^2 \boxtimes \mathcal{O}).$$

L'ouvert V est grand dans $X \times S^{n-2} X$ dans le sens déjà employé, donc

$$H^0(V, L^2 \boxtimes \mathcal{O}) = H^0(X \times S^{n-2} X, L^2 \boxtimes \mathcal{O}) = H^0(X, L). \quad \square$$

Preuve du théorème 1.4 :

La suite exacte (10) induit la suite exacte

$$0 \rightarrow H^0(X_*^{[n]}, S^2 L^{[n]}) \rightarrow H^0(X_*^{[n]}, \mathcal{D}_2^{[n]}) \oplus H^0(X_*^{[n]}, L^{2[n]}) \rightarrow H^0(X_*^{[n]}, \mu^* L^2|_{\partial X_*^{[n]}}) \quad (106)$$

Le même argument que dans la preuve du lemme 5.6 prouve que la composition

$$S^2 H^0(X, L) \xrightarrow{\text{can}} H^0(X_*^{[n]}, S^2 L^{[n]}) \rightarrow H^0(X_*^{[n]}, \mathcal{D}_2^{[n]}) = S^2 H^0(X, L)$$

est un isomorphisme. Par conséquent $H^0(X_*^{[n]}, S^2 L^{[n]})$ s'écrit $S^2 H^0(X, L) \oplus K^0$, où K^0 est le noyau du morphisme :

$$H^0(X_*^{[n]}, L^{2[n]}) \xrightarrow{b} H^0(X_*^{[n]}, \mu^* L^2|_{\partial X_*^{[n]}}) = H^0(X, L^2).$$

Dans [D2] il est démontré que l'isomorphisme (2)

$$H^0(X_*^{[n]}, L^{2[n]}) = H^0(X, L^2)$$

est induit par une application $\Xi = X^{[n,1]} \rightarrow S^{n-1} X \times X$. La proposition 6.3 nous donne un isomorphisme

$$H^0(\partial X_*^{[n]}, \mu^* L^2) = H^0(X, L^2),$$

induit par un morphisme $\partial X^{[n]} \rightarrow S^{n-2}X \times X$. Par le même argument que dans la preuve du théorème 1.2 (diagramme (100)) ces morphismes sont compatibles. Par conséquent le morphisme b est un isomorphisme, donc $K^0 = 0$. \square

Preuve du théorème 1.8 :

On tensorise la suite exacte (10) par le faisceau inversible \mathcal{D}_n^A sur $X_*^{[n]}$. On obtient une suite exacte de sections globales :

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(X_*^{[n]}, S^2 L^{[n]} \otimes \mathcal{D}_n^A) &\rightarrow H^0(X_*^{[n]}, \mathcal{D}_2^{[n]} \otimes \mathcal{D}_n^A) \oplus H^0(X_*^{[n]}, L^{2[n]} \otimes \mathcal{D}_n^A) \rightarrow \\ &\rightarrow H^0(X_*^{[n]}, \mu^* L^2|_{\partial X_*^{[n]}} \otimes \mathcal{D}_n^A) \end{aligned} \quad (107)$$

De manière analogue à la preuve des propositions 6.2, 6.3 on démontre :

$$\begin{aligned} H^0(X_*^{[n]}, \mathcal{D}_2^{[n]} \otimes \mathcal{D}_n^A) &= S^{n-2}H^0(A) \otimes S^2H^0(L \otimes A) \\ H^0(X_*^{[n]}, \mu^* L^2|_{\partial X_*^{[n]}} \otimes \mathcal{D}_n^A) &= S^{n-2}H^0(A) \otimes H^0(L^2 \otimes A^2). \end{aligned} \quad (108)$$

Le même argument que dans la preuve du lemme 5.6 démontre que la composition

$$S^{n-2}H^0(X, A) \otimes S^2H^0(L \otimes A) \xrightarrow{can} H^0(X^{[n]}, S^2 L^{[n]} \otimes \mathcal{D}_n^A) \rightarrow H^0(X_*^{[n]}, \mathcal{D}_2^{[n]} \otimes \mathcal{D}_n^A)$$

est un isomorphisme. D'où la décomposition en somme directe (16), où K^0 est le noyau du morphisme

$$b : H^0(X_*^{[n]}, L^{2[n]} \otimes \mathcal{D}_n^A) \rightarrow H^0(X_*^{[n]}, \mu^* L^2|_{\partial X_*^{[n]}} \otimes \mathcal{D}_n^A). \quad (109)$$

Dans [D2] il est démontré que l'isomorphisme (12)

$$H^0(X_*^{[n]}, L^{2[n]} \otimes \mathcal{D}_n^A) \simeq H^0(S^{n-1}X \times X, \mathcal{D}_{n-1}^A \boxtimes (L^2 \otimes A)) \simeq S^{n-1}H^0(A) \otimes H^0(L^2 \otimes A)$$

est induit par une application $\Xi = X^{[n,1]} \rightarrow S^{n-1}X \times X$. L'isomorphisme (108) est induit par une application $\partial X_*^{[n]} \rightarrow S^{n-2}X \times X$. Par suite le morphisme (109) s'écrit sous la forme (17). Le même argument que dans la preuve du théorème 1.2 (diagramme (100)) démontre que le morphisme (17) est induit par l'application :

$$\begin{aligned} d : S^{n-2}X \times X &\rightarrow S^{n-1}X \times X \\ (x_3 + \cdots + x_n, x) &\mapsto (x + x_3 + \cdots + x_n, x). \end{aligned}$$

D'après la formule de Künneth l'application (17) s'écrit explicitement sous la forme (18). \square

7 Résultats pour $H^*(X^{[n]}, S^2 L^{[n]})$ pour n général

Partout dans cette section n sera un entier ≥ 2 . Les résultats de la section 4 seront utilisés ici pour étendre la suite exacte (10) à une suite exacte sur un ouvert $X_{\sim}^{[n]}$ dont le complémentaire est de codimension 3 dans $X^{[n]}$. L'extension à $X^{[n]}$ de cette suite exacte, donnée dans le théorème 7.7, nous permettra d'énoncer, dans la proposition 7.9, des conditions suffisantes pour que le calcul de $H^*(X^{[n]}, S^2 L^{[n]})$ pour n général puisse se faire de manière analogue que dans les cas particuliers $n = 2, 3$.

On note $X_{(3)}^{[n]}$ l'ouvert des schémas Z dont le support schématique est de la forme $HC(Z) = x_1 + \cdots + x_n$ ou $2x_1 + x_3 + \cdots + x_n$ ou $3x_1 + x_4 + \cdots + x_n$, pour des x_i distincts. On note $X_{(2,2)}^{[n]}$ l'ouvert des schémas Z dont le support schématique est de la forme $HC(Z) = x_1 + \cdots + x_n$ ou $2x_1 + x_3 + \cdots + x_n$ ou $2x_1 + 2x_3 + x_5 + \cdots + x_n$, pour des x_i distincts. On note $X_{\sim}^{[n]} = X_{(3)}^{[n]} \cup X_{(2,2)}^{[n]}$.

Proposition 7.1 *Le faisceau $\mathcal{D}_2^{[n]}$ est localement libre de rang $\frac{n(n-1)}{2}$ sur $X_\sim^{[n]}$.*

Preuve :

Il suffit de démontrer cette affirmation pour l'image réciproque de $\mathcal{D}_2^{[n]}$ par le morphisme $q : B^n \rightarrow X^{[n]}$ du diagramme (8). Par abus de notation, on note aussi $\mathcal{D}_2^{[n]}$ cette image réciproque. On note $B_\sim^n, B_{(3)}^n$ respectivement $B_{(2,2)}^n$ les images réciproques par q des ouverts $X_\sim^{[n]}, X_{(3)}^{[n]}, X_{(2,2)}^{[n]}$. On démontrera que $\mathcal{D}_2^{[n]}$ est localement libre de rang $\frac{n(n-1)}{2}$ sur $B_{(3)}^n$ et $B_{(2,2)}^n$. L'ouvert $B_{(3)}^n$ est recouvert par les ouverts B_{ijk}^n des points $Z \in B^n$ tels que $\rho(Z)$ a tous ses points $x_l, l \neq i, j, k$ distincts entre eux et distincts de x_i, x_j, x_k . De la même manière que dans le lemme 2.3 on peut démontrer que chacun des ouverts B_{ijk}^n s'identifie à un ouvert dans $B^3 \times X^{n-3}$. De la même manière que dans le lemme 2.5, relation (35), on peut démontrer l'identification (pour simplifier on prend $(i, j, k) = (1, 2, 3)$) :

$$\mathcal{D}_2^{[n]} = \mathcal{D}_2^{[3]} \boxtimes \mathcal{O} \oplus L^{2[2]} \boxtimes \left(\sum_{i \geq 4} L_i \right) \oplus \mathcal{O} \boxtimes \left(\sum_{4 \leq i < j \leq n} L_{ij} \right).$$

D'après la proposition 4.3, $\mathcal{D}_2^{[3]}$ est localement libre de rang 3. Les autres faisceaux intervenant dans la décomposition sont localement libres. Par suite $\mathcal{D}_2^{[n]}$ est localement libre sur $B_{1,2,3}^n$ de rang $3 + 3 \cdot (n-3) + \frac{(n-3)(n-4)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

De la même manière, $B_{(2,2)}^n$ est recouvert par les ouverts $B_{ij,kl}^n$ pour i, j, k, l distincts dans l'ensemble $\{1, \dots, n\}$, où $B_{ij,kl}^n$ est l'ouvert des points $Z \in B^n$ tels que $\rho(Z)$ a tous ses points x_m distincts, sauf peut-être $x_i = x_j$ et $x_k = x_l$. Pareil, on prouve que chacun des $B_{ij,kl}^n$ s'identifie à un ouvert dans $B^2 \times B^2 \times X^{n-4}$ et que dans cette identification on a (pour simplifier on prend $(i, j, k, l) = (1, 2, 3, 4)$) :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_2^{[n]} = & \mathcal{D}_2 \boxtimes \mathcal{O} \boxtimes \mathcal{O} \oplus \mathcal{O} \boxtimes \mathcal{D}_2 \boxtimes \mathcal{O} \oplus L^{2[2]} \boxtimes L^{2[2]} \boxtimes \mathcal{O} \oplus \\ & \oplus L^{2[2]} \boxtimes \mathcal{O} \boxtimes \left(\sum_{i \geq 5} L_i \right) \oplus \mathcal{O} \boxtimes L^{2[2]} \boxtimes \left(\sum_{i \geq 5} L_i \right) \oplus \mathcal{O} \boxtimes \mathcal{O} \boxtimes \left(\sum_{5 \leq i < j \leq n} L_{ij} \right). \end{aligned}$$

Par conséquent $\mathcal{D}_2^{[n]}$ est localement libre de rang

$$1 + 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot (n-4) + 2 \cdot (n-4) + \frac{(n-4)(n-5)}{2} = \frac{n(n-2)}{2}$$

sur $B_{(2,2)}^n$. □

On avait noté $\partial X^{[n]}$ l'hypersurface des schémas singuliers dans $X^{[n]}$. L'ouvert $\partial X_*^{[n]} = \partial X^{[n]} \cap X_*^{[n]}$ est lisse, irréductible et dont le complémentaire est de codimension 2 dans $X^{[n]}$. Alors $\partial X^{[n]}$ est réduite et irréductible, donc intègre. On considère sa normalisation $\pi : \Sigma \rightarrow \partial X^{[n]}$. On note Σ_\sim l'image réciproque $\pi^{-1}(\partial X^{[n]} \cap X_\sim^{[n]})$. L'ouvert $\partial X_*^{[n]}$ est lisse, donc π est un isomorphisme au-dessus de $\partial X_*^{[n]}$. On note $i : \partial X_*^{[n]} \rightarrow \Sigma_\sim$ le morphisme d'inclusion. L'analogue du lemme 4.1 est :

Lemme 7.2 *On considère le diagramme :*

$$\begin{array}{ccccc} \Sigma_\sim & & & & \\ \pi \downarrow & \swarrow i & & & \\ \partial X^{[n]} & \xleftarrow{j} & \partial X_*^{[n]} & \xrightarrow{\mu} & X, \end{array}$$

où μ est le morphisme défini dans la section 2. Il existe une application régulière $\tilde{\mu} : \Sigma_\sim \rightarrow X$ qui rend commutatif ce diagramme.

Preuve :

Considérons l'image réciproque

$$D^n = p_{n2}^{-1}(\partial X^{[2]}) \quad (110)$$

de l'hypersurface $\partial X^{[2]} \subset X^{[2]}$. De la même manière que dans la démonstration du lemme 4.1, la preuve du lemme se réduit à l'analogue de lemme 5.6 :

Lemme 7.3 *La variété $D_\sim^n = D^n \cap \pi_{32}^{-1}(X_\sim^{[n]})$ est lisse.*

Preuve :

La question est locale et il suffit de la traiter en géométrie analytique. Le morphisme $\pi_{n2} : D^n \rightarrow \partial X^{[n]}$ est un isomorphisme au-dessus de $\partial X_\ast^{[n]}$, et $\partial X_\ast^{[n]}$ est lisse. Il suffit donc de traiter le problème au-dessus d'un point de $X_{(3)}^{[n]} \setminus X_\ast^{[n]}$ et au-dessus d'un point de $X_{(2,2)}^{[n]} \setminus X_\ast^{[n]}$. On note Z_0 ce point.

Dans le premier cas le point Z_0 admet un voisinage analytique isomorphe à un ouvert analytique de $X^{[3]} \times X^{n-3}$, et dans cette identification le morphisme π_{n2} s'écrit $\pi_{32} \times id$. On applique le lemme 4.6 pour conclure.

Dans le second cas soit $Z_0 = (Z, Z') \in D \subset X^{[n]} \times \partial X^{[2]}$. Le schéma Z est la réunion disjointe $Z' \amalg Z'' \amalg x_5 \amalg \dots \amalg x_n$, où $Z'' \in \partial X^{[2]}$ et les points de $\text{supp } Z', \text{supp } Z''$ et x_i sont deux à deux disjoints. Le point Z admet un voisinage analytique dans $X^{[n]}$ isomorphe à un voisinage analytique du point $(Z', Z'', x_5, \dots, x_n)$ dans $X^{[2]} \times X^{[2]} \times X^{n-4}$. Dans cette identification, le fermé $D \subset X^{[n]} \times \partial X^{[2]}$ coïncide avec le fermé $D \subset (X^{[2]} \times X^{[2]} \times X^{n-4}) \times \partial X^{[2]}$ des points $((Z', Z'', x_5, \dots, x_n), Z''')$ tels que $Z' = Z'''$. Alors D est isomorphe localement avec $\partial X^{[2]} \times X^{[2]} \times X^{n-4}$, donc D est lisse. \square

Remarque 7.4 On ne peut pas affirmer l'existence d'une application $\tilde{\mu} : \Sigma \rightarrow X$, puisque la variété $X^{[n,2]}$ n'est pas forcément lisse. On ne peut pas appliquer la proposition II 8.23(b) de [Hart] pour démontrer la normalité de la variété D^n .

Les lemmes 4.4 et 4.5 admettent les généralisations suivantes, dont la démonstration est complètement analogue :

Lemme 7.5 *Le morphisme $L^{2[n]} \rightarrow \mu^* L^2|_{\partial X_\ast^{[n]}}$ sur $X_\ast^{[n]}$ de la suite exacte (10) se prolonge à un morphisme surjectif sur $X_\sim^{[n]}$:*

$$L^{2[n]} \rightarrow \pi_* \tilde{\mu}^* L^2.$$

Lemme 7.6 *Le morphisme $\mathcal{D}_2^{[n]} \rightarrow \mu^* L^2|_{\partial X_\ast^{[n]}}$ sur $X_\ast^{[n]}$ de la suite exacte (10) se prolonge à un morphisme surjectif sur $X_\sim^{[n]}$:*

$$\mathcal{D}_2^{[n]} \rightarrow \pi_* \tilde{\mu}^* L^2.$$

Le faisceau $\tilde{\mu}^* L^2$ est inversible sur le grand ouvert $\Sigma_\sim = \pi^{-1}(X_\sim^{[n]})$ (dont le complémentaire est de codimension supérieure ou égale à 2) dans la variété normale Σ . Il se prolonge à un faisceau inversible $\widetilde{L^2}$ sur Σ . On note $j : X_\sim^{[n]} \rightarrow X^{[n]}$ l'inclusion canonique. On est en mesure d'énoncer

Théorème 7.7 *La suite exacte (10) de faisceaux sur $X_\ast^{[n]}$ se prolonge à une suite exacte sur $X_\sim^{[n]}$:*

$$0 \rightarrow S^2 L^{[n]} \rightarrow j_* \mathcal{D}_2^{[n]} \oplus L^{2[n]} \rightarrow \pi_* \widetilde{L^2} \rightarrow 0. \quad (111)$$

Preuve :

La preuve reprend à l'identique la preuve du théorème 4.2, pour les inclusions $X_*^{[n]} \xrightarrow{k} X_{\sim}^{[n]} \xrightarrow{j} X^{[n]}$. On utilise l'annulation

$$R^1 j_*(S^2 L^{[n]}) = 0, \quad (112)$$

qui vient du fait que $j : X_{\sim}^{[n]} \rightarrow X^{[n]}$ est l'inclusion d'un ouvert dont le complémentaire est de codimension 3 dans la variété lisse $X^{[n]}$. \square

La remarque suivante résume les résultats techniques suffisants pour une généralisation des théorèmes 1.1 (n=2) et 1.2 (n=3) à un résultat valable pour n général. On rappelle que les schémas $X^{[n,2]}$ respectivement D^n ont été définis dans le diagramme (9), respectivement (110). On rappelle la définition suivante de [KKMSD], chap. I, §3 :

Définition 7.8 *Un schéma X est à singularités rationnelles s'il est normal et si, pour $f : Z \rightarrow X$ une résolution des singularités de X , l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée :*

- a) $R^i f_* \mathcal{O}_Z = 0$ pour $i > 0$.
- b) X est Cohen-Macaulay et $f_* \omega_Z = \omega_X$
(où ω_Z est le faisceau dualisant sur Z et ω_X le faisceau dualisant sur X).

Remarque 7.9 Les théorèmes 1.1 et 1.2 suggèrent pour $n \geq 2$ l'isomorphisme :

$$H^*(X^{[n]}, S^2 L^{[n]}) = S^{n-2} H^*(X, \mathcal{O}) \otimes S^2 H^*(X, L) \bigoplus (S^{n-1} H^*(X, \mathcal{O}) / S^{n-2} H^*(X, \mathcal{O})) \otimes H^*(X, L^2).$$

Cette affirmation résulte des hypothèses suivantes :

- le faisceau $\mathcal{D}_2^{[n]}$ est localement libre sur $X^{[n]}$ (113)
- le morphisme $\pi_{n2} : X^{[n,2]} \rightarrow X^{[n]}$ satisfait $R^q \pi_{n2*}(p_{n2}^* \mathcal{D}_2) = 0$ pour $q > 0$ (114)
- le morphisme $\pi_{n2} : D^n \rightarrow X^{[n]}$ satisfait $R^q \pi_{n2*}(p_{n2}^* \mathcal{D}_2) = 0$ pour $q > 0$ (115)
- le schéma $X^{[n,2]}$ est à singularités rationnelles (116)
- le schéma D^n est à singularités rationnelles. (117)

Preuve de la remarque 7.9 :

La relation (113) permet de remplacer $j_* \mathcal{D}_2^{[n]}$ par $\mathcal{D}_2^{[n]}$ dans la suite (111). On commence par démontrer l'analogue de la proposition 5.2 :

Lemme 7.10 *Dans les hypothèses (113), (114) et (116) on a :*

$$H^*(X^{[n]}, \mathcal{D}_2^{[n]}) = S^{n-2} H^*(X, \mathcal{O}) \otimes S^2 H^*(X, L).$$

Preuve du lemme :

La relation (114) implique

$$H^*(X^{[n]}, \mathcal{D}_2^{[n]}) = H^*(X^{[n,2]}, p_{n2}^* \mathcal{D}_2). \quad (118)$$

On considère le morphisme $\tilde{p}_{n2} = (a, p_{n2}) : X^{[n,2]} \rightarrow S^{n-2} X \times X^{[2]}$, où le morphisme a associe au couple $(Z, Z') \in X^{[n]} \times X^{[2]}$ le point $HC(Z) - HC(Z')$, HC étant le morphisme de Hilbert-Chow. On

considère ensuite une résolution des singularités $r : X^{[n,2]'} \rightarrow X^{[n,2]}$. Le morphisme \tilde{p}_{n2} est birationnel, donc $\tilde{p}'_{n2} = \tilde{p}_{n2} \circ r$ est une résolution des singularités. Par [Bout], $S^{n-2}X \times X^{[2]}$ est à singularités rationnelles, donc

$$R^q \tilde{p}'_{n2*} \mathcal{O}_{X^{[n,2]'}} = \begin{cases} 0 & \text{si } q > 0 \\ \mathcal{O}_{S^{n-2}X \times X^{[2]}} & \text{si } q = 0. \end{cases} \quad (119)$$

L'hypothèse (116) implique

$$R^q r_* \mathcal{O}_{X^{[n,2]'}} = \begin{cases} 0 & \text{si } q > 0 \\ \mathcal{O}_{S^{n-2}X \times X^{[2]}} & \text{si } q = 0. \end{cases} \quad (120)$$

Les relations (119), (120) et la suite spectrale de Leray pour $R\tilde{p}'_{n2*} = Rp_{n2*} \circ Rr_*$ impliquent :

$$R^q p_{n2*} \mathcal{O}_{X^{[n,2]}} = \begin{cases} 0 & \text{si } q > 0 \\ \mathcal{O}_{S^{n-2}X \times X^{[2]}} & \text{si } q = 0 \end{cases}$$

d'où :

$$H^*(X^{[n,2]}, p_{n2}^* \mathcal{D}_2) = H^*(S^{n-2}X \times X^{[2]}, \mathcal{O} \boxtimes \mathcal{D}_2) = S^{n-2}H^*(X, \mathcal{O}) \otimes S^2H^*(X, L). \quad (121)$$

Les relations (118) et (121) impliquent le résultat. \square

Le lemme suivant généralise la proposition 5.3 :

Lemme 7.11 *Dans les hypothèses (115) et (117) on a :*

$$H^*(X^{[n]}, \widetilde{L^2}) = S^{n-2}H^*(X, \mathcal{O}) \otimes H^*(X, L^2).$$

Preuve :

On considère le morphisme $\nu = (a, \tilde{\mu}) : \Sigma \rightarrow S^{n-2}X \times X$, où a est le morphisme $\Sigma \rightarrow S^{n-2}X$ donné par $a(s) = HC(\pi(s)) - 2\tilde{\mu}(s)$. En analogie avec la preuve de la proposition 5.3, il suffit de démontrer :

Lemme 7.12 *On a :*

$$R^q \nu_* \mathcal{O}_\Sigma = \begin{cases} 0 & \text{si } q > 0 \\ \mathcal{O}_{S^{n-2}X \times X} & \text{si } q = 0. \end{cases} \quad (122)$$

Preuve du lemme 7.12 :

Soit $r : D' \rightarrow D^n$ une résolution des singularités. Considérons le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} D' & \xrightarrow{r} & D^n & \xrightarrow{\tilde{\nu}} & S^{n-2}X \times \partial X^{[2]} \\ & & \downarrow \tilde{\pi}_{n2} & & \downarrow b \\ & & \Sigma & \xrightarrow{\nu} & S^{n-2}X \times X \\ & & \downarrow \pi & & \\ & & \partial X^{[3]} & & \end{array}$$

où $\tilde{\nu} = (a \circ \pi_{n2}, p_{n2})$. En analogie avec la preuve du lemme 5.4, l'hypothèse (115) permet de réduire le problème (122) au morphisme $D^n \rightarrow S^{n-2}X \times X$, l'hypothèse (117) nous permet encore de nous réduire au morphisme $D' \rightarrow S^{n-2}X \times X$, et le fait que $S^{n-2}X \times \partial X^{[2]}$ est à singularités rationnelles réduit le problème au morphisme $S^{n-2}X \times X \rightarrow S^{n-2}X \times X$, fibration en \mathbb{P}_1 . \square

On vient de démontrer les lemmes 7.10 et 7.11, les analogues des propositions 5.2 et 5.3. À partir de là, la démonstration de la proposition 7.9 recopie identiquement la preuve du théorème 1.2. \square

Références

- [Bout] J. F. BOUTOT. *Singularités rationnelles et quotients par les groupes réductifs*. Invent. Math. **88** (1987) 65-68.
- [Cheah] J. CHEAH. *The cohomology of smooth nested Hilbert schemes of points*, PhD thesis, University of Chicago, (1984).
- [D1] G. DANILA. *Sections du fibré déterminant sur l'espace de modules des faisceaux semi-stables de rang 2 sur le plan projectif*. Ann. Inst. Fourier, Grenoble **50** (2000), no. 5, 1323-1374.
- [D2] G. DANILA. *Sur la cohomologie d'un fibré tautologique sur le schéma de Hilbert d'une surface*. Journal of Algebraic Geometry **10** (2001), no. 2, 247-280.
- [Foga] J. FOGARTY. *Algebraic families on an algebraic surface*. Amer. J. Math. **90** (1968), 511-521.
- [Hart] R. HARTSHORNE. *Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Mathematics 52, Springer-Verlag (1977).
- [KKMSD] G. KEMPF, F. KNUDSEN, D. MUMFORD, B. SAINT-DONAT. *Toroidal embeddings I*. Lect. Notes Math. **339**, Berlin-Heidelberg-New York : Springer (1973).
- [O-S-S] C. OKONEK, M. SCHNEIDER, H. SPINDLER. *Vector bundles on projective space*. Progress in Mathematics 3, Birkhäuser (1980).
- [Tikh] A. TIKHOMIROV. *On Hilbert schemes and flag varieties of points on algebraic surfaces*, Preprint.